UNTERSUCHUNG VON LAUFZEITVERTEILUNGEN EINER ROHRSTRÖMUNG MIT DER KERNRESONANZ - STRÖMUNGSMETHODE

Inaugural - Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Physik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
WERNER TRAUTWEIN
aus Karlsruhe

1974

UNTERSUCHUNG VON LAUFZEITVERTEILUNGEN EINER ROHRSTRÖMUNG MIT DER KERNRESONANZ - STRÖMUNGSMETHODE

Inaugural - Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Physik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
WERNER TRAUTWEIN
aus Karlsruhe

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Referent: Prof. Dr. S. Wilking
2. Referent: Prof. Dr. H. Stenschke

Tag der Promotion: 17.12.1974

Inhaltsverzeichnis

		Seite
1	Einleitung	2
2	Prinzip der Untersuchungsmethode	4
3	Laufzeitverteilungen	8
4	Laufzeitkorrelation	15
5	Experimente	20
5.1	Meßverfahren	20
5.2	Apparatur	26
5.21	Strömungsdetektor	26
5.22	Elektronik bei Laufzeitmessungen	29
5.23	Strömung bei Laufzeitmessungen	32
5.3	Ergebnisse	36
5.31	Die Meßkurven	36
5.32	Parameter der Laufzeitverteilung	44
5.33	Die Korrelationslänge	52
5.34	Die Meßgenauigkeit	54
6	Zusammenfassung	57
	Anhang	
1.	Der Erwartungswert des Kerndipoloperators	61
2.	Laufzeitmittelwert $\bar{\tau}$ und mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$	67
3.	Berechnung der Signalkurven	69
	Verzeichnis der Abbildungen	74
	Literaturverzeichnis	75
	Lebenslauf	77

1. Einleitung

Die Dreifelder Strömungsmethode wurde von S. Wilking [1] zur Untersuchung kernmagnetischer Resonanz in schwachen Magnetfeldern entwickelt und unabhängig von A. I. Zhernovoi [2] zur Messung schwacher Magnetfelder. Das Prinzip dieser Methode liegt in der räumlichen Trennung von Einstrahlung und Nachweis (Bild 1a). Wesentlicher Vorteil gegenüber magnetischer Kernresonanzspektroskopie an ruhenden Substanzen in schwachen Feldern ist die Unabhängigkeit der Signalintensität von der Stärke des Zwischenfeldes. Wegen der örtlichen Trennung von Einstrahlung und Nachweis ist das Detektorsignal gegenüber der Einstrahlung zeitlich verzögert; die Information wird durch die Strömung vom Zwischenfeld zum Detektor übertragen.

Der Einfluß der Strömung auf das Meßergebnis konnte bei den Untersuchungen von Wilking durch die Wahl eines stationären Meßverfahrens weitgehend umgangen werden. Andere Autoren, die sich mit Kernresonanzmessungen an strömender Substanz beschäftigten, haben den Einfluß der Strömung näherungsweise berücksichtigt, so Zhernovoi [2] und Trautwein [3] oder vernachlässigt [4,5]. Der Einfluß der Strömung auf die Kernresonanzmessungen beruht auf der Laufzeitverteilung der Flüssigkeitsteilchen. Deshalb erlaubt die Kernresonanz-Strömungsmethode umgekehrt die Messung der Laufzeitverteilung strömender Flüssigkeiten. Dies ist die Problemstellung der vorliegenden Arbeit.

Sieht man die Literatur über turbulente Strömungen durch, z.B. J. O. Hinze [6], so findet man, daß viele Versuche unternommen wurden, die individuelle Teilchenbewegung einer Strömung zu verfolgen. Nebel in Gasströmungen, Farbe in Flüssigkeitsströmungen, radioaktive Isotope und andere Hilfsmittel wurden zur Markierung benutzt. Trotzdem ist es nützlich ein weiteres Verfahren, die Kennzeichnung der Strömungsteilchen durch ihre Spinorientierung, zu diskutieren: Einerseits wird bei dieser Kennzeichnung der Strömungszustand nicht merklich beeinflußt, andererseits kann mit dieser Methode bei NMR-spektroskopischen Messungen die Laufzeit und deren Streuung an der gerade vorliegenden Strömung bestimmt und bei der Auswertung berücksichtigt werden. Eine Ausarbeitung dieses Verfahrens dient daher sowohl der NMR-Spektroskopie als auch der Strömungsforschung.

Das Problem, die Laufzeitverteilung zu berechnen ist für die turbulente Rohrströmung nicht gelöst. Jede auf dem Geschwindigkeitsfeld (Euler-Darstellung) basierende Theorie ist dazu ungeeignet, weil eine Turbulenzfeld-

Theorie keine Aussagen über den Weg oder die Laufzeit individueller Teilchen machen kann. Die Taylor'sche Theorie der Turbulenzdiffusion [7] (Lagrange-Darstellung) basiert auf der individuellen Teilchenbewegung und ist auf freie und homogene Turbulenz anwendbar. Sie läßt sich wegen der Randbedingungen nicht unmittelbar auf die Rohrströmung anwenden. In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch gemacht den Grundgedanken zu übertragen.

In Abschnitt 2 wird das Prinzip der Meßmethode dargestellt. Nach Definition der Laufzeitverteilung strömender Teilchen in Abschnitt 3 werden zwei Grenzfälle (sehr kurze und sehr lange Meßstrecke) betrachtet. In Abschnitt 4 schließt sich eine Diskussion der Laufzeitkorrelation an. In Abschnitt 5 werden die Meßverfahren, die Apparatur und die Meßergebnisse diskutiert.

2. Prinzip der Untersuchungsmethode

Das Prinzip der Dreifelder-Strömungsmethode zeigt Bild 1a. Eine Flüssigkeit, deren Moleküle ein kernmagnetisches Dipolmoment besitzen, durchströmt drei Magnetfeldbereiche der Apparatur. In einem starken Polarisatorfeld $\vec{B}_P$ entsteht eine Polarisation der Kerndipolmomente. Die Aufenthaltsdauer τ_P im Polarisatorfeld ist größer als die Relaxationszeit T_1, sodaß die aus dem Polarisator ausströmende Flüssigkeit Kerndipolmomente besitzt, die sich fast im Zustand thermodynamischen Gleichgewichtes befinden ($\langle\mu_z\rangle_P \simeq \langle\mu_z\rangle_{P,\infty}$, s. Bild 1b). Von dort bis zum Detektorfeld $\vec{B}_D$ strömt die Flüssigkeit schnell, sodaß der Nachweisdetektor noch vor Ablauf einer Relaxationszeit erreicht wird. Im Zwischenfeld $\vec{B}_o$ wird ein magnetisches Wechselfeld eingestrahlt, das eine Zustandsänderung der dort gerade durchströmenden Dipolmomente induziert. Dies ist in Bild 1b als der Übergang von Kurve a nach Kurve b oder c eingezeichnet.

Im Detektorfeld $\vec{B}_D$ durchströmen die Strömungsteilchen das hochfrequente Wechselfeld der Detektorspule. Das Wechselfeld erzwingt Kohärenz der Kernspinpräzession, sodaß in die Detektorspule eine Wechselspannung der Präzessionsfrequenz induziert wird, von der im Detektor das Signal gewonnen wird. Die Detektorspule ist konzentrisch auf das Strömungsrohr gewickelt, ihr Anfang bei x_D und Ende bei x'_D begrenzen den Flüssigkeitsbereich, der sich im Wechselfeld der Detektorspule befindet und der N_V Moleküle mit Kerndipolmoment enthält (vergl. Bild 1a). Bei der Diskussion des Detektors wird gezeigt, daß das Signal proportional zum mittleren Dipolmoment der durch die Eintrittsfläche bei x_D in die Detektorspule einströmenden Dipole ist. Es wird daher von der z-Komponente des mittleren Dipolmomentes der Einströmmenge N_D ausgegangen. Diese kann als Scharmittelwert

$$m_D = \overline{\langle\mu_z\rangle_D}^{N_D} \qquad (1)$$

des Erwartungswertes der z-Komponente μ_z des Kerndipol-Operators berechnet werden. Die Anzahl N_D der im Zeitintervall dt durch den Rohrquerschnitt bei x_D einströmenden Teilchen läßt sich durch den Teilchenstrom ausdrücken,

$$N_D = I_D\, dt = I_o\, dt \,. \qquad (2)$$

N_D ist Teilmenge von N_V. Der stationäre Strom I_o einer inkompressiblen Rohrströmung mit konstantem Querschnitt q läßt sich aus dem Mittelwert $\bar{v}$

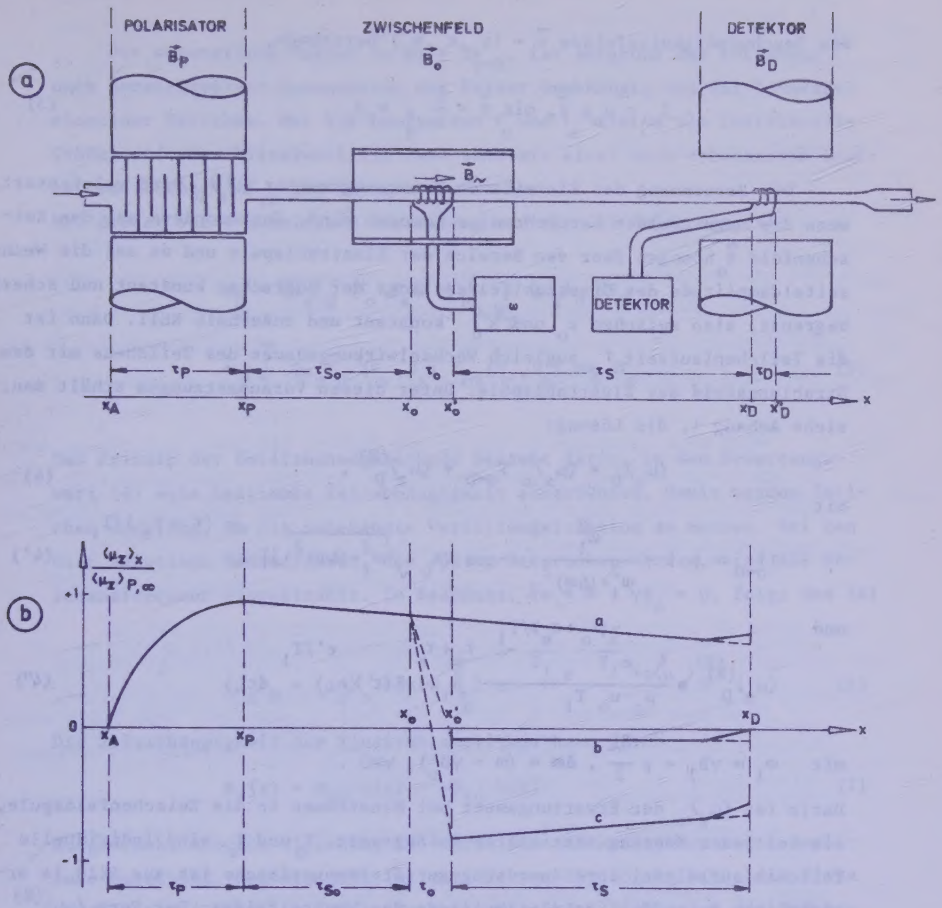


Bild 1

a: Schematische Darstellung des Drei-Felder-Strömungsspektrometers mit Zuordnung der im Text verwendeten Laufzeitindizierung zu den Streckenabschnitten.

b: Verlauf des Erwartungswertes der z-Komponente des kernmagnetischen Dipolmomentes über der Strömungsstrecke.

Kurve a: Ohne Einstrahlung im Zwischenfeld.

Kurve b: Einstrahlung so, daß am Detektor der Erwartungswert (im Mittel) verschwindet.

Kurve c: Einstrahlung so, daß am Detektor der kleinste Erwartungswert auftritt. Nach (4') ist das bei $\Delta\omega = 0$ und $\omega_1\tau_o = \pi$ der Fall.

des Geschwindigkeitsfeldes $\vec{v} = (v_x, v_r, v_\varphi)$ berechnen,

$$I_o = n_o q \bar{v}, \text{ mit } \bar{v} = \frac{1}{q} \int_q v_x dq \quad . \tag{3}$$

Die Berechnung des Einteilchen-Erwartungswertes $\langle \mu_z \rangle_D$ wird erleichtert, wenn die Magnetfelder bereichsweise homogen sind. Insbesondere sei das Zwischenfeld $\vec{B}_o$ homogen über den Bereich der Einstrahlspule und es sei die Wechselfeldamplitude des Einstrahlfeldes längs der Rohrachse konstant und scharf begrenzt, also zwischen x_o und x'_o konstant und außerhalb Null. Dann ist die Teilchenlaufzeit τ_o zugleich Wechselwirkungsdauer des Teilchens mit dem Strahlungsfeld der Einstrahlspule. Unter diesen Voraussetzungen erhält man, siehe Anhang 1, die Lösung:

$$\langle \mu_z \rangle_D = \langle \mu_z \rangle_o \, T_{o \to D} + \langle \mu_z \rangle_D^{(R)} \quad , \tag{4}$$

mit

$$T_{o \to D} = \left\{ 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + (\Delta\omega)^2} \left[1 - \cos\left(\tau_o \sqrt{\omega_1^2 + (\Delta\omega)^2} \right) \right] \right\} e^{-(\tau_o + \tau_s)/T_1} \quad , \tag{4'}$$

und

$$\langle \mu_z \rangle_D^{(R)} = \frac{\chi_o \, e^{-(\tau_o + \tau_s)/T_1}}{\mu_o \, n_o \, T_1} \int_o^{\tau_o + \tau_s} B(t') \, e^{t'/T_1} \, dt' \tag{4''}$$

mit $\omega_1 = \gamma B_1 = \gamma \frac{B_\sim}{2}$, $\Delta\omega = (\omega - \gamma B_o)$, $\gamma > 0$.

Darin ist $\langle \mu_z \rangle_o$ der Erwartungswert bei Einströmen in die Zwischenfeldspule, ein bei jeder Messung stationärer Anfangswert. τ_o und τ_s sind individuelle Teilchenlaufzeiten, ihre Zuordnung zur Strömungsstrecke ist aus Bild 1a ersichtlich. $B_\sim = 2B_1$, ist die Amplitude des Wechselfeldes. Der Term $\langle \mu_z \rangle_D^{(R)}$ entsteht durch thermische Relaxation. Er hängt nicht vom Anfangswert ab, auch nicht von ω_1 oder ω. Er läßt sich schlecht messen und nicht berechnen. Im Integral (4") ist B(t') der Betrag des im Laborsystem zeitkonstanten Feldes am Teilchenort $\vec{r} = \vec{r}(t')$. Eine Abschätzung von $\langle \mu_z \rangle_D^{(R)}$ ist nicht erforderlich, weil dieser Term bei der Auswertung der Meßkurven durch Differenzbildung eliminiert wird.

In Bild 1b ist der analog (4) berechnete Einteilchen-Erwartungswert $\langle \mu_z \rangle_x$ in Abhängigkeit von der Stelle x dargestellt. Die drei Kurven a,b und c beziehen sich auf verschiedene Einstrahlungen im Zwischenfeld. Ist $\omega_1 = 0$, dann gilt die Kurve a, ist $\omega_1 \tau_o = \pi$ und zugleich $\Delta\omega = 0$, dann gilt Kurve c. Kurve b gilt für einen mittleren Wert. Der vor x_D sichtbare Anstieg der Kurven deutet den Einfluß des Terms $\langle \mu_z \rangle_D^{(R)}$ an.

Der wesentliche Faktor in (4), $T_{o\to D}$, ist aufgrund der Forderung nach bereichsweiser Homogenität der Felder unabhängig von der Bahnkurve einzelner Teilchen. Nur die Laufzeiten τ_o und τ_s treten als individuelle Größen auf. Der Mittelwert (1) läßt sich mit einer noch unbekannten Laufzeitverteilung*) f_{os} als Integral schreiben.
Mit dieser auf 1 normierten Verteilung und mit (4) folgt aus (1)

$$m_D = \overline{\langle \mu_z \rangle_D}\,(\tau_o, \tau_s) = \frac{1}{N_D} \int_{N_D} \langle \mu_z \rangle_D \, dN_D$$

$$= \int_o^\infty \int \langle \mu_z \rangle_D \,(\tau_o, \tau_s)\, f_{os}(\tau_o, \tau_s)\, d\tau_o\, d\tau_s \,. \qquad (5)$$

Das Prinzip der Untersuchungsmethode besteht darin, in den Erwartungswert (4) eine bestimmte Zeitabhängigkeit einzuführen. Damit werden Teilchen markiert, um die unbekannte Verteilungsfunktion zu messen. Bei den hier benutzten Meßverfahren, die später besprochen werden, wird die Resonanzfrequenz eingestrahlt. In Resonanz, $\Delta\omega = \omega - \gamma B_o = 0$, folgt aus (4)

$$\langle \mu_z \rangle_D = \langle \mu_z \rangle_o \cos(\omega_1 \tau_o)\, e^{-\frac{\tau_o}{T_1}} e^{-\frac{\tau_s}{T_1}} + \langle \mu_z \rangle_D^{(R)} \,. \qquad (6)$$

Die Zeitabhängigkeit der Einstrahlamplitude kann durch

$$\omega_1(t) = \omega_{10}\, h(t) = \gamma B_{10}\, h(t) \qquad (7)$$

ausgedrückt werden. Gleichung (4) wurde für stückweise konstante Amplitude berechnet. Deshalb gilt (6) mit (7) nur für solche h(t), die diese Voraussetzung erfüllen. Diese Frage wird bei der Diskussion der Meßverfahren aufgegriffen werden. (Abschnitt 5.1 und Anhang 3).

Die Berechnung des Mittelwertes (1) bzw. (5) erfordert eine Einteilung der strömenden Menge (2) nach einer Teilmengenstruktur, die von den Laufzeiten der Teilchen bestimmt wird. Eine Definition der Laufzeitverteilung folgt im nächsten Abschnitt.

---

*) vergl. dazu Gleichung (23).

3 Laufzeitverteilungen

N Teilchen durchströmen die Strecke $L = x_2 - x_1$ eines Rohres mit konstantem Querschnitt q. Davon benötigt die Teilmenge $dN(\tau)$ Laufzeiten zwischen τ und $\tau+d\tau$. Dann definieren wir die Laufzeitverteilung $f_L(\tau)$ durch

$$\frac{dN(\tau)}{N} = f_L(\tau)\, d\tau \quad . \tag{8}$$

Die so definierte Verteilung ist auf 1 normiert, die Teilmengen $dN(\tau)$ sind über $(0 \leqslant \tau < \infty)$ disjunkt und N ist eine große Zahl (Moleküle einer Flüssigkeit). Die Verteilungsfunktion f_L besitzt die Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsdichte.

Wird eine Testmenge N_1 bei x_1 zur Zeit t_1 gebildet, z.B. durch kurze Impulseinstrahlung an vorbeiströmenden Teilchen, dann haben alle Teilchen dieser Menge gleiche Anfangszeit $t_{1k}=t_1$, aber individuelle Endzeiten $t_{2k}=t_1+\tau_k$. Die Teilmenge

$$dN_1(\tau) = N_1\, f_L(\tau)\, d\tau \tag{8a}$$

passiert den Querschnitt x_2 im Zeitintervall $d\tau$ zur Zeit $t_1+\tau$.

Wird eine Testmenge N_2 bei x_2 zur Zeit t_2 gebildet, dann haben alle Teilchen dieser Menge gleiche Endzeit $t_{2k}=t_2$, aber individuelle Anfangszeiten $t_{1k}=t_2-\tau_k$. Die Teilchen der Teilmenge

$$dN_2(\tau) = N_2\, f_L(\tau)\, d\tau \tag{8b}$$

waren im Intervall $d\tau$ zur Zeit $t_2-\tau$ am Querschnitt x_1.

Setzt man $N_2=I_o dt$ und $dN_2(\tau)=dI_o(\tau)dt$, oder $N_1=I_o dt$ und $dN_1(\tau)=dI_o(\tau)dt$, so folgt aus (8a) oder (8b)

$$dI_o(\tau) = I_o\, f_L(\tau)\, d\tau \quad . \tag{8c}$$

I_o ist der Gesamtstrom, $dI_o(\tau)$ der Teilstrom mit Teilchenlaufzeiten zwischen τ und $\tau+d\tau$.

Beide Gleichungen (8a) und(8b) werden im folgenden benötigt. Bei einigen Verfahren der Laufzeitmessung ist eine Markierung am Anfang der

Strecke erforderlich, dann gilt (8a). Einige theoretische Betrachtungen schließen an (8b,c) an. Die Laufzeitverteilung (8) hängt von der Bildung der Menge N ab. In dieser Arbeit wird stets eine strömende Menge entsprechend (2) zugrunde gelegt, sodaß die Gleichungen (8a) bis (8c) äquivalent sind.

Das Problem, die Laufzeitverteilung einer turbulenten Rohrströmung zu berechnen, ist nicht allgemein gelöst. Die auf den Navier-Stokes- und auf den Reynolds-Gleichungen aufbauende Theorie ist für die Randbedingungen der Rohrströmung nicht analytisch lösbar. Aber auch eine numerische Lösung könnte nicht zu einer Laufzeitverteilung führen, weil diese Theorie das Strömungsfeld lokal, aber nicht die Teilchenbewegung individuell beschreibt. Das Feld $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r},t)$ beschreibt die lokale Geschwindigkeit. Die Laufzeit τ_L hängt mit der individuellen Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{u}$ zusammen, definiert durch

$$\bar{u} = (1/\tau_L) \int_{t_o}^{t_o+\tau_L} u_x(t')\, dt' = \frac{1}{\tau_L} \int_o^L dx = \frac{L}{\tau_L} \qquad (9)$$

Darin ist u_x die Komponente der individuellen Teilchengeschwindigkeit in Richtung der Rohrachse.

Wir betrachten zwei Grenzfälle für die theoretische Voraussagen über die Laufzeitverteilung möglich sind.

a) Der eine Grenzfall ist durch $\bar{u}=v$ charakterisiert. Es seien dazu zwei Beispiele genannt. Bei der laminaren Rohrströmung beschreibt das Feld eindeutig die Teilchenbahn, d.h. Feldlinien und Teilchenbahnen fallen zusammen. Die Geschwindigkeit hängt nur von der Radialkoordinate r ab, $\vec{v} = (v,0,0)$, $v = v(r)$. Sortiert man die Teilchen nicht nur nach ihrer Laufzeit τ_L, sondern auch nach der Geschwindigkeit oder der Ortskoordinate r, so erkennt man, daß diese drei Strukturen wegen der Abhängigkeit

$$\tau_L = L/\bar{u} = L/v(r) \qquad (10)$$

zusammenfallen. Deshalb läßt sich aus dem Feld $\vec{v}(r)$ die Geschwindigkeitsverteilung und die Laufzeitverteilung berechnen. (Die thermische Diffusion sei vernachlässigt.)

Als zweites Beispiel wird eine kurze Strecke turbulenter Strömung betrachtet. Auch in diesem Fall setzen wir $\bar{u} = v$, wobei $v = v(r)$ der stationäre Mittelwert des Geschwindigkeitsfeldes der turbulenten Rohrströmung ist. Dies wird durch die Vermutung nahegelegt, daß benachbarte Teilchen einer Flüssigkeit auch bei turbulenter Strömung vergleichbare Geschwindigkeiten haben, die sie für eine hinreichend kurze Strecke beibehalten.

Zur Berechnung der Laufzeitverteilung betrachten wir bei beiden Beispielen den Teilchenstrom I_o. Teilchen mit der Geschwindigkeit $v(r)$ haben die Radialkoordinate r und bilden den Teilstrom

$$dI_o(r) = n_o\, v(r)\, 2\pi\, r\, dr\ .$$

Mit $v = L/\tau_L$, $r = r(\tau_L)$ und $dr = \frac{dr}{d\tau_L}\, d\tau_L$ folgt mit (8c) und $I_o = n_o\, \pi R^2\, \bar{v}$ die Laufzeitverteilung

$$f_L(\tau_L)\, d\tau_L = \frac{dI_o(\tau_L)}{I_o} = \frac{2\, L\, r(\tau_L)}{R^2\, \bar{v}\, \tau_L} \frac{dr}{d\tau_L}\, d\tau_L\ . \tag{11}$$

Wendet man (11) auf laminare Strömung an, so erhält man aus dem Geschwindigkeitsfeld

$$v_{lam}(r) = 2\,\bar{v}\ \ (1 - \frac{r^2}{R^2})\ \ ;\ \int_q v(r)dq = \bar{v}q \tag{12}$$

die Laufzeitverteilung

$$f_{L,L}(\tau_L) = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\bar{v}^2}\ \frac{1}{\tau_L^3}\ \ ;\ \ (\frac{L}{2\bar{v}} < \tau_L < \infty)\ . \tag{12'}$$

Bei turbulenter Strömung, aber nur kurzer Strecke wird für den stationären Mittelwert des Geschwindigkeitsfeldes eine empirische Formel*) herangezogen

$$v_{turb}(r) = c\,\bar{v}\ (1 - \frac{r}{R})^{\nu}\ \ ;\ \int_q v(r)dq = \bar{v}q \tag{13'}$$

$$\text{mit}\ \ c = \frac{1}{2}(\nu+1)(\nu+2)\ .$$

Diese Beziehung approximiert Messungen des Geschwindigkeitsfeldes gut, bis auf eine dünne Randschicht. Hier ist sie deshalb brauchbar, weil die Zahl der Teilchen in der Randschicht nur klein ist gegen die Zahl aller Strömungsteilchen die bei dem Kernresonanz-Meßverfahren erfaßt werden. Mit (11) folgt aus (13) die Laufzeitverteilung

$$f_{L,K}(\tau_L) = \frac{2\,\bar{v}\,c^2}{\nu\ L} \left[\left(\frac{L}{c\,\bar{v}\,\tau_L}\right)^{2+\frac{1}{\nu}} - \left(\frac{L}{c\,\bar{v}\,\tau_L}\right)^{2+\frac{2}{\nu}} \right]\ ; \tag{13}$$

$$\left(\frac{L}{c\,\bar{v}} < \tau_L < \infty\right)\ .$$

Der Index K bedeutet Korrelation und wird später verständlich werden.

---

* Vergl. z.B. Hinze a.a.O. Seite 519

Die Verteilungen (12') und (13) sind auf 1 normiert. Sie liefern beide den Laufzeitmittelwert

$$\overline{\tau_L} = \int_0^\infty \tau_L f_L(\tau_L)\, d\tau_L = \frac{L}{\bar{v}} . \qquad (14)$$

Das mittlere Schwankungsquadrat, definiert durch das Integral

$$\overline{(\delta\tau_L)^2} = \int_0^\infty (\tau_L - \bar{\tau}_L)^2 \, f_L(\tau_L)\, d\tau_L \qquad (15)$$

divergiert mit der Verteilung (12'). Die Verteilung (13) besitzt das mittlere Schwankungsquadrat

$$\overline{(\delta\tau_L)^2_K} = \bar{\tau}_L^2 \, \frac{5\nu^2-\nu^4}{\nu^4-5\nu^2+4} \qquad (15')$$

Die Verteilung (13) kann daher statt durch $L/\bar{v}$ und ν auch durch die Parameter $\bar{\tau}_L$ und $\overline{(\delta\tau_L)^2}$ charakterisiert werden.

b) Beim zweiten Grenzfall wird eine lange Strecke turbulenter Rohrströmung betrachtet. Das Geschwindigkeitsfeld kann dabei zur Berechnung der Laufzeitverteilung nicht herangezogen werden. In diesem Fall führt ein Diffusionsansatz zum Ziel. Wir betrachten dazu N Teilchen der Strömung, die den Teilstrom I(x,t) bilden und die zur Anfangszeit t=0 am Querschnitt bei x=0 sind.
$\bar{n}(x,t) = \frac{1}{q_x} \int_{q_x} n(x,r,\varphi,t)\, dq_x$ sei die mittlere Dichte der betrachteten Teilchen im Querschnitt q_x zur Zeit t. Der Ansatz

$$I(x,t) = q\, \bar{n}(x,t)\, u_o - q\, D\, \frac{\partial \bar{n}(x,t)}{\partial x} \qquad (16)$$

enthält die Geschwindigkeit u_o (Translation) und die Diffusionskonstante D (turbulente Diffusion) als Parameter. Der Ansatz beruht auf der Vermutung, daß bei hinreichend langer Strecke und turbulenter Strömung im Rohr die Bahnen der Teilchen statistisch unbestimmt verlaufen. Für homogene und frei turbulente Strömung hat erstmals G.J. Taylor[7] einen ähnlichen Ansatz benutzt. Die Rohrströmung ist zwar in x-Richtung homogen, aber auf den Querschnitt q beschränkt. Ein solcher Ansatz mit Diffusionsterm ist bei der Rohrströmung zwar naheliegend, insbesondere weil das Kernresonanz-Meßver-

fahren über den Querschnitt mittelt und deshalb nur die x-Koordinate auftritt, kann aber vorerst nur als Vermutung angesehen werden. Eine Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist es Gleichung (16) experimentell zu prüfen.

Mit der Kontinuitätsbedingung für die N Teilchen

$$q \frac{\partial \bar{n}(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = 0$$

führt (16) zu der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \bar{n}(x,t)}{\partial t} + u_o \frac{\partial \bar{n}(x,t)}{\partial x} - q D \frac{\partial^2 \bar{n}(x,t)}{\partial x^2} = 0 . \qquad (16')$$

Diese Gleichung wird mit einer Anfangsverteilung $\bar{n}_a(x,o)$ gelöst. Es folgt

$$\bar{n}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{n}_a(x',o)}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{(x-x'-u_o t)^2}{4 D t}} dx' \qquad (17)$$

mit $\int_{-\infty}^{\infty} \bar{n}_a(x',o)\, dx' = N/q$;

Kurze Impulseinstrahlung führt zu einer bei x=0 konzentrierten Anfangsverteilung der N Teilchen, die näherungsweise darstellbar ist durch

$$\bar{n}_a(x,0) = \frac{N}{q} \delta(x) .$$

Damit folgt aus (17)

$$\bar{n}(x,t) = \frac{N}{q\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{(x-u_o t)^2}{4 D t}} . \qquad (18)$$

Für festes t besteht danach Normalverteilung der N Teilchen über der Ortskoordinate mit dem Mittelwert der Dichte bei $\bar{x} = u_o t$ und mit dem mittleren Schwankungsquadrat $\overline{(x - \bar{x})^2} = 2 D t$.

Mit (18) in (16) erhält man den Teilstrom

$$I(x,t) = q \frac{1}{2} (u_o + \frac{x}{t}) \bar{n}(x,t) .$$

Damit folgt aus (8a) mit $N_1 = N$, $dN_1 = I\,dt$, $x=L$, $t=\tau_L$ und $dt = d\tau_L$ die Laufzeitverteilung

$$f_{L,D}(\tau_L) = \frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{L/u_o}{\tau_L}\right)}{\sqrt{4\pi\,(D/u_o^2)\,\tau_L}}\; e^{-\frac{\left[(L/u_o)-\tau_L\right]^2}{4\,(D/u_o^2)\,\tau_L}} \quad . \tag{19}$$

Die Verteilung (19) ist auf 1 normiert. Sie liefert den Mittelwert

$$\bar{\tau}_{L,D} = \frac{L}{u_o} + \frac{D}{u_o^2} \quad , \tag{20}$$

und das mittlere Schwankungsquadrat[8)]

$$\overline{(\delta\tau_L)^2_D} = \frac{D}{u_o^2}\left(\frac{2\,L}{u_o} + \frac{5\,D}{u_o^2}\right) = \frac{2\,D}{u_o^2}\,\bar{\tau}_{L,D} + 3\left(\frac{D}{u_o^2}\right)^2 \quad . \tag{21}$$

Die Beziehungen (20) und (21) werden in Abschnitt 5.32 benötigt.

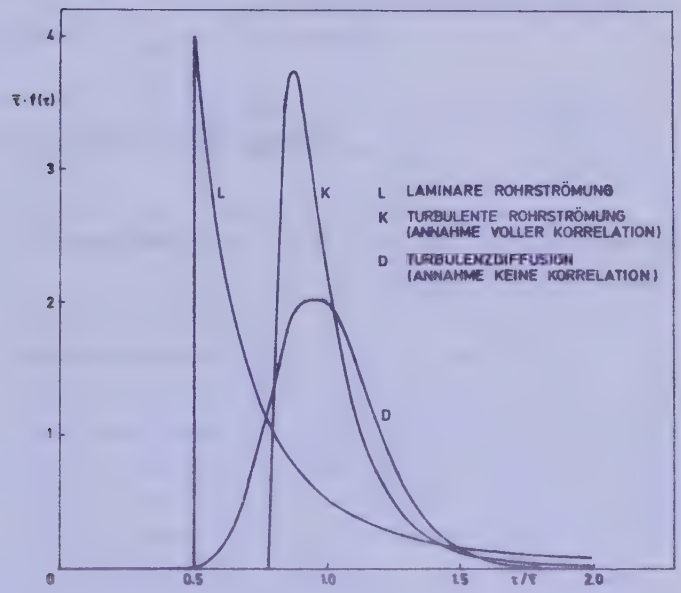


Bild 2 Laufzeitverteilungen, L nach (12'), K nach (13) und D nach (19) berechnet. Bei den Kurven K und D ist der freie Parameter so gewählt, daß die mittleren Schwankungsquadrate gleich werden.

Es wurden für zwei Grenzfälle Laufzeitverteilungen berechnet, aber ihre gegenseitige Abgrenzung war nur qualitativ möglich. Die Formulierungen, "so kurz, daß $\bar{u} = v$ gilt" und "so lang, daß die Bahnen statistisch unbestimmt verlaufen", sollen noch ergänzt und die Grenzfälle sollen experimentell geprüft werden. Eine Diskussion des Übergangsbereiches wird nach der Betrachtung von Laufzeitkorrelationen im folgenden Abschnitt möglich sein.

Für spätere Anwendung seien noch die relativen Schwankungsquadrate der beiden Laufzeitverteilungen angegeben. Aus (15') folgt (Grenzfall $L \to 0$):

$$\frac{\overline{(\delta\tau_L)^2_K}}{\bar{\tau}^2_{L,K}} = \frac{5\nu^2 - \nu^4}{\nu^4 - 5\nu^2 + 4} \approx \frac{5}{4}\nu^2 \quad . \tag{22a}$$

Die Näherung $5/4\,\nu^2$ gilt für $\nu^2 \ll 1$. Das ist bei turbulenter Strömung immer erfüllt, wie in Abschnitt 5.32 gezeigt wird.
Aus (20) und (21) folgt (Grenzfall $L \to \infty$):

$$\frac{\overline{(\delta\tau_L)^2_D}}{\bar{\tau}^2_{L,D}} = \frac{2D}{L u_o} \quad \frac{1 + 5\,D/2\,Lu_o}{1 + D/Lu_o} \approx \frac{2D}{L\bar{v}} \quad . \tag{22b}$$

Die Näherung $2D/L\bar{v}$ gilt für $D \ll L\bar{v}$, siehe dazu Anhang 2 .

4 Laufzeitkorrelation

Wenn, wie in Gleichung (4) und (5) zwei Laufzeiten auftreten, dann sind die strömenden Teilchen nach einer Teilmengenstruktur einzuteilen, die durch beide Laufzeiten bestimmt wird. Wir betrachten dazu, wie bei der Definition (8) eine strömende Menge aus N Teilchen, die die Strecke $L_o = x'_o - x_o$ und die Strecke $L_s = x_D - x'_o$ durchströmen. Es sei $dN(\tau_o, \tau_s)$ die Teilmenge von N, deren Teilchen auf der Strecke L_o Laufzeiten zwischen τ_o und $\tau_o + d\tau_o$ und auf der Strecke L_s Laufzeiten zwischen τ_s und $\tau_s + d\tau_s$ besitzen. Die gemeinsame Laufzeitverteilung wird definiert durch

$$\frac{dN(\tau_o, \tau_s)}{N} = f_{os}(\tau_o, \tau_s)\, d\tau_o\, d\tau_s \quad . \tag{23}$$

Mit der Menge (2), also mit $N = N_D$, definiert (23) die in (5) schon eingeführte Laufzeitverteilung.

Die Funktion f_{os} läßt sich zerlegen

$$f_{os}(\tau_o, \tau_s) = f_o(\tau_o)\, f_s(\tau_s) + K_{os}(\tau_o, \tau_s) \tag{24}$$

mit den Einzelwahrscheinlichkeitsdichten

$$f_o(\tau_o) = \int_0^\infty f_{os}(\tau_o, \tau_s)\, d\tau_s \quad ,$$

$$f_s(\tau_s) = \int_0^\infty f_{os}(\tau_o, \tau_s)\, d\tau_o$$

und der Korrelationsfunktion $K_{os}(\tau_o, \tau_s)$.

f_o und f_s sind Wahrscheinlichkeitsdichten, die wegen (23) die Definition (8) erfüllen. In der mathematischen Statistik wird eine Funktion f_{os} "gemeinsame" Wahrscheinlichkeitsdichte genannt; f_o und f_s heißen "Randverteilungen". K_{os} beschreibt die statistische Abhängigkeit der Laufzeiten τ_o und τ_s voneinander. Ist $K_{os} = 0$ dann heißen τ_o und τ_s statistisch voneinander unabhängige Zufallsvariable.

Zur Korrelationsanalyse, hier zur Feststellung statistischer Unabhängigkeit, bedient man sich jedoch nicht der Korrelationsfunktion, sondern des Korrelationskoeffizienten, der im folgenden definiert wird. Zunächst werden gewissen Ereignissen A bzw. B (hier das Auftreten bestimmter Laufzeitwerte bei Teilchen der Menge N) Werte der Variablen x_a bzw. x_b (geordnete Mengen) zugeordnet. Man nennt x_a bzw. x_b "zufällige Variable" der Ereignisse A bzw. B in der Ereignismenge N. Eine zufällige Variable x läßt sich durch ihren Mittelwert $\bar{x}$ und ihre Schwankung δx ausdrücken, $x = \bar{x} + \delta x$. Als Korrelationskoeffizient R_{ab} der zufälligen Variablen x_a und x_b definiert man

$$R_{ab} = \frac{\overline{\delta x_a \; \delta x_b}}{\left[\overline{(\delta x_a)^2}\;\overline{(\delta x_b)^2}\right]^{1/2}} = \frac{\overline{(x_a - \bar{x}_a)\;(x_b - \bar{x}_b)}}{\left[\overline{(x_a - \bar{x}_a)^2}\;\overline{(x_b - \bar{x}_b)^2}\right]^{1/2}} \; . \qquad (25)$$

Der Korrelationskoeffizient verschwindet, wenn x_a und x_b voneinander unabhängige Zufallsvariable sind. Sind x_a und x_b voneinander abhängig, dann ist $R_{ab} \neq 0$. Sind die Variablen voneinander gleichsinnig linear abhängig, dann ist $R_{ab} = 1$.

Der Korrelationskoeffiezient R_{os} der Variablen τ_o , τ_s ist also definiert durch

$$R_{os} = \frac{\overline{\delta\tau_o \; \delta\tau_s}}{\left[\overline{(\delta\tau_o)^2}\;\overline{(\delta\tau_s)^2}\right]^{1/2}} \; . \qquad (25')$$

Im Falle der Laufzeit einer stationären Rohrströmung, mit einer nach (8) erklärten Laufzeitverteilung, läßt sich ein Zusammenhang gewinnen zwischen dem mittleren Schwankungsquadrat der Laufzeit, dem Korrelationskoeffizienten und der Streckenlänge.

Dazu werde die Strecke der Länge L in k Teilstrecken der Länge $\lambda_i = \lambda$ eingeteilt, es ist also

$$L = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = k\lambda \ .$$

Zur Strecke L gehört die Laufzeit $\tau_L = \bar{\tau}_L + \delta\tau_L$ und zu den Teilstrecken λ_i gehören die Laufzeiten $\tau_i = \bar{\tau}_i + \delta\tau_i$. Da alle Teilstrecken die gleiche Verteilungsfunktion $f_\lambda(\tau_\lambda)$ besitzen, sind die Mittelwerte der Teilstreckenlaufzeiten alle gleich und der Mittelwert $\bar{\tau}_L$ ist die Summe der Mittelwerte der Teillaufzeiten. Es gilt also

$$\bar{\tau}_L = \sum_{i=1}^{k} \bar{\tau}_i = k\,\bar{\tau}_\lambda \quad \text{wegen} \quad \bar{\tau}_i = \bar{\tau}_\lambda \ ; \ (i=1..k)$$

und

$$\delta\tau_L = \sum_{i=1}^{k} \delta\tau_i \ .$$

Auch die mittleren Schwankungsquadrate der Teillaufzeiten sind unter sich alle gleich. Das mittlere Schwankungsquadrat der Laufzeit τ_L läßt sich durch die Laufzeitschwankungen $\delta\tau_i$ ausdrücken. Mit

$$\overline{(\delta\tau_i)^2} = \overline{(\delta\tau_\lambda)^2} \ ; \quad (i=1...k)$$

und mit (25) folgt

$$\overline{(\delta\tau_L)^2} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \overline{\delta\tau_i\,\delta\tau_j} = \overline{(\delta\tau_\lambda)^2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} R_{ij} \ . \qquad (26)$$

Darin tritt eine Matrix auf, deren Elemente R_{ij} nach (25) Korrelationskoeffizienten der Laufzeiten τ_i und τ_j sind. Bei stationärer Strömung sind die Korrelationskoeffizienten R_{ij} aus Symmetriegründen nur vom Abstand der Teilstrecken λ_i und λ_j abhängig, nicht aber von der Lage innerhalb der Strecke L . Der Abstand der Teilstrecken ist $\nu\lambda$ mit $\nu = |i-j|$ .Also sind in der Matrix alle Elemente einer Diagonalen gleich. Für die Hauptdiagonale ($\nu=0$) gilt $R_0 = R_{ii} = 1$ und für die ν-te Nebendiagonale gilt $R_\nu = R_{ij} = R_{ji}$. Deshalb läßt sich die Summe reduzieren auf

$$\overline{(\delta\tau_L)^2} = \overline{(\delta\tau_\lambda)^2} \left[k + 2 \sum_{\nu=1}^{k-1} (k-\nu)\, R_\nu\right] \ .$$

Diese Summe läßt sich als Integral schreiben. Der Übergang erfolgt mit $\lambda \to 0$ und $k \to \infty$ bei $\lambda k = L = \text{konst}$. Die unabhängige Variable sei $\rho = \nu\lambda$ mit $d\rho = \lambda$. Man erhält

$$\overline{(\delta\tau_L)^2} = \lim_{\lambda \to 0} \left\{ \overline{(\delta\tau_\lambda)^2} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \right\} \frac{2}{L} \int_0^L (1 - \frac{\rho}{L}) R(\rho) d\rho \quad .$$

Mit der Proportionalität $L/\bar{\tau}_L = \lambda/\bar{\tau}_\lambda$, die aus der oben genannten Additivität der Laufzeitmittelwerte folgt, kann man zu den relativen mittleren Schwankungsquadraten übergehen und dabei den Grenzübergang ausführen. Man erhält

$$\frac{\overline{(\delta\tau_L)^2}}{\bar{\tau}_L^2} = \left(\frac{\overline{(\delta\tau_\lambda)^2}}{\bar{\tau}_\lambda^2} \right)_o F(L) \qquad (27)$$

mit $F(L) = \frac{2}{L} \int_0^L (1 - \frac{\rho}{L}) R(\rho) \, d\rho$. Der Index $_o$ bedeutet $\lambda \to 0$

Besteht volle Laufzeitkorrelation wie im Grenzfall a des vorigen Abschnitts, dann besteht nach (10) gleichsinnig lineare Abhängigkeit und es ist $R(\rho) = 1$. Damit erhält man asymptotisch für kleine L

$$\left(\frac{\overline{(\delta\tau_L)^2}}{\bar{\tau}_L^2} \right)_{L \to 0} = \left(\frac{\overline{(\delta\tau_\lambda)^2}}{\bar{\tau}_\lambda^2} \right)_o \qquad (27a)$$

Besteht andererseits keine Korrelation, dann ist $R(\rho) = 0$. Wie bei der Diskussion des Grenzfalles b erläutert, kann dies für große L vermutet werden. Für $L \to \infty$ geht das Integral in (27) gegen den Grenzwert

$$L_c = \int_0^\infty R(\rho) \, d\rho \quad . \qquad (28)$$

Gleichung (28) definiert die Korrelationslänge L_c. Damit folgt aus (27) für große L asymptotisch

$$\left(\frac{\overline{(\delta\tau_L)^2}}{\bar{\tau}_L^2} \right)_{L \to \infty} = \left(\frac{\overline{(\delta\tau_\lambda)^2}}{\bar{\tau}_\lambda^2} \right)_o \frac{2 L_c}{L} \qquad (27b)$$

Nach (27a) und (27b) ist für stationäre Rohrströmung im Grenzfall a das relative Schwankungsquadrat unabhängig von L und im Grenzfall b proportional zu 1/L . Der Übergangsbereich zwischen den beiden Grenzfällen wird durch (27) beschrieben.

Faßt man die Ergebnisse (22a) und (22b) mit (27a) und (27b) zusammen, so ergeben sich folgende Beziehungen.

1. Der Grenzwert des relativen Schwankungsquadrates für $\lambda \to 0$, der als Faktor in (27), (27a) und (27b) auftritt, läßt sich wegen (27a) und (22a) durch ν ausdrücken,

$$\left(\frac{\overline{(\delta\tau_\lambda)^2}}{\bar{\tau}_\lambda^{\,2}} \right)_0 \approx \frac{5}{4} \nu^2 , \qquad (30a)$$

also durch einen Parameter der, wie (13') zeigt, aus Geschwindigkeitsfeldmessungen bestimmt werden kann.

2. Zwischen der Diffusionskonstanten und der Korrelationslänge besteht nach (22b) und (27b) mit (30a) die Relation

$$D = \frac{5}{4} \nu^2 \frac{1}{\bar{v}} L_c . \qquad (30b)$$

D und L_c beschreiben beide den dispersiven Aspekt des Teilchentransports in der Rohrströmung. Weder D noch L_c ist durch lokale Messung bestimmbar. Gleichung (30b) zeigt, daß sie durch einen Faktor verknüpft sind, der nur Größen enthält die durch lokale Messungen des Geschwindigkeitsfeldes bestimmt werden können.

Korrelationsbetrachtungen im Zusammenhang mit der Behandlung von Strömungsproblemen wurden erstmals von G. I. Taylor [7] für die Geschwindigkeitskorrelation individueller Teilchen in einer freien und homogenen turbulenten Strömung durchgeführt. Die hier durchgeführte Übertragung dieser Theorie auf das Problem der Laufzeitkorrelation führt zu dem Ergebnis (27) mit den Grenzfällen (27a) und (27b) die durch Laufzeitmessungen unmittelbar geprüft werden können.

5 Experimente

5.1 Meßverfahren

Bei der Messung von Laufzeitverteilungen handelt es sich um die Messung der Übertragungslaufzeit an einem Übertragungssystem, die Strömungsstrecke ist für die Drei-Felder-Strömungsmethode neben dem Detektor der wesentliche Teil der Meßwert-Übertragungsstrecke. Zur Messung der Laufzeitverteilungen werden fünf Meßverfahren angegeben. Davon werden drei bei den Messungen benutzt. Bei den Meßverfahren ist die Einstrahlamplitude im Zwischenfeld zeitabhängig und es wird die Resonanzfrequenz eingestrahlt. Nach (7) ist die Zeitabhängigkeit der Einstrahlamplitude ω_1 bezeichnet durch,

$$\omega_1(t) = \omega_{10} h(t) = \gamma B_{10} h(t) \qquad (7)$$

Die Meßverfahren sind im einzelnen folgende.

1. Sprungverfahren zur Messung der Verteilung $f_s(\tau_s)$.

(Wegen der Indizierung vergl. Bild 1,a). Durch Einschalten der Resonanzfrequenz wird im Zwischenfeld eine sprunghafte Änderung des Erwartungswertes der die Einstrahlamplitude verlassenden Kerndipolmomente erzeugt. Gemessen wird am Detektor der Übergang von einem stationären Meßwert vor Einschalten zu dem neuen, wieder stationären Wert. Meßkurve ist die Übergangsfunktion der Strömungsstrecke L_s. Die Eingangszeitfunktion h(t) und ω_{10} werden dabei wie folgt gewählt

$$h(t) = S(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} \qquad (31)$$

$$\omega_{10} = \pi/\bar{\tau}_o \quad . \qquad (31')$$

Dieses Verfahren ist eine Systemmessung im Zeitbereich.

2. Impulsverfahren zur Messung der Verteilung $f_s(\tau_s)$.

Durch kurzes, impulsartiges Einschalten der Resonanzeinstrahlung wird die Testmenge markiert. Gemessen werden die markierten Kerndipole beim

Durchströmen durch den Detektor. Meßwert ist die Gewichtsfunktion (Greensche Funktion) der Strömungsstrecke L_s. Die Zeitfunktion h(t) wird dabei wie folgt gewählt:

$$h(t) = S(t) - S(t-\tau_i) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq t \leq \tau_i \\ 0 & t > \tau_i \end{cases} \qquad (32)$$

mit der Impulsdauer τ_i und

$$\omega_{10} = \frac{\pi}{\bar{\tau}_o} \quad \text{oder} \quad \omega_{10} = \frac{\pi}{\tau_i}, \text{ falls } \tau_i < \bar{\tau}_o \; . \qquad (32')$$

Auch dieses Verfahren ist eine Systemmessung im Zeitbereich.

3. Modulationsverfahren zur Messung der Verteilung $f_s(\tau_s)$.

Bei Resonanzeinstrahlung wird die Einstrahlamplitude periodisch moduliert. Dadurch entsteht am Ausgang der Einstrahlspule, also am Anfang der Strecke L_s, eine periodische Modulation des mittleren Dipolmomentes, die sich wellenartig zum Detektor hin fortpflanzt. Eine Amplituden- und Phasenmessung liefert die Fouriertransformierte der Gewichtsfunktion. Dieses Verfahren ist eine Systemmessung im Frequenzbereich, es wurde auf Vorschlag des Verfassers von H.Girke [9] untersucht. Es wurde hier nicht angewendet, weil der Zeitaufwand für eine Messung im Vergleich mit dem Verfahren 1 und 2 erheblich größer ist und weil sich das Verfahren nicht so einfach automatisieren läßt wie die anderen (zur Lösung der Fragestellung dieser Arbeit müssen sehr viele Laufzeitverteilungen gemessen werden).

4. Zwischenfeldverfahren zur Messung der Verteilung $f_o(\tau_o)$.

Dieses Verfahren ist ein quasistationäres Meßverfahren, wobei die Einstrahlamplitude so langsam verändert wird, daß h(t) als Parametervariation behandelt werden kann. Es wird als Funktion der Frequenz ω_1 die Fouriertransformierte der Laufzeitverteilung $f_o(\tau_o)$ gemessen. Ist T die Meßdauer, dann wird dazu h(t) gewählt als,

$$h(t) = t/T \qquad (0 \leq t \leq T) \; . \qquad (33)$$

Es werden k Meßwerte (k=1000) zu den Zeiten $t_i = iT/k, (i=1,2,..,k)$ erfaßt. T wird so groß gewählt, daß die Amplitudenänderung quasistationär ist. ω_{10} wird so groß gewählt, daß das Spektrum der Meßkurve (Fouriertransformierte) ausreichend breit ist. Jeweilige Testmessungen zeigten, daß der Bereich

$$20\,\pi/T < \omega_{10} < 100\,\pi/T \quad , \tag{33'}$$

für alle Messungen genügte.

Im Gegensatz zu den ersten drei Meßverfahren, die "klassische" Systemmessungen sind (es wird die response des Systems auf eine Eingangsfunktion im Zeitbereich bzw. im Frequenzbereich beobachtet, wobei die Einstrahlung im Zwischenfeld nur der Markierung der Teilchen dient)wird hier der Einfluß der Laufzeitverteilung auf den Kernresonanzprozess beobachtet und zur Messung der Laufzeitverteilung ausgenutzt.

5. Doppelresonanzverfahren zur Messung beliebiger $f_L(\tau_L)$.

Dieses Verfahren benutzt im Zwischenfeld B_o zwei getrennte Einstrahlspulen, die im Abstand L auf dem Strömungsrohr angebracht sind. In beiden Spulen wird $\omega_1 \bar{\tau}_o$ konstant gehalten. In Abhängigkeit des Resonanzabstandes $\Delta\omega = (\omega - \gamma B_o)$ entsteht eine Interferenzstruktur, die näherungsweise die Fouriertransformierte der Laufzeitverteilung für die Strecke L zwischen den Einstrahlspulen ist. Dieses Meßverfahren geht auf einen Vorschlag von S. Wilking zurück und wurde vom Verfasser zusammen mit G.Abend untersucht [10]. Das Verfahren 5 wird hier aus gleichem Grund wie das Modulationsverfahren 3 nicht benutzt.

Die Berechnung der Signalkurven der Meßverfahren beruht auf Gleichung (1) in der Form (5), wobei die Zeitabhängigkeit der Einstrahlung nach (31),(32) oder (33) gegeben ist. Der Erwartungswert in (5) ist, wie (4) zeigt, als Anfangswert und Transformation zuzüglich Relaxationsterm darstellbar. Daran ändert auch eine zeitabhängige Einstrahlung nichts. Mit einer Indizierung der Größen wie in Bild 1 folgt aus (5)

$$m_D = \int_0^\infty\int \langle \mu_z \rangle_o \; T_{o\to D}(\tau_o, \tau_s)\; f_{os}(\tau_o, \tau_s)\; d\tau_o\; d\tau_s + m_D^{(R)}, \qquad (34)$$

mit

$$m_D^{(R)} = \int_0^\infty\int \langle \mu_z \rangle_D^{(R)}\; f_{os}(\tau_o, \tau_s)\; d\tau_o\; d\tau_s \quad .$$

Der Relaxationsterm $m_D^{(R)}$ bleibt auch bei zeitabhängiger Einstrahlung zeitunabhängig, es gilt auch dann (4''). Voraussetzung dazu ist stationäre Strömung mit $\bar{v}$=konst für jede einzelne Messung.

Mit der Zerlegung (24) und mit der Produktdarstellung $T_{o\to D} = T_{o\to o'} T_{o'\to D}$ folgt aus (34)

$$m_D = \int_0^\infty m_{o'}\; T_{o'\to D}(\tau_s)\; f_s(\tau_s)\; d\tau_s +$$

$$+ \int_0^\infty\int \langle \mu_z \rangle_o \; T_{o\to D}\; K_{os}\; d\tau_o\; d\tau_s + m_D^{(R)} \qquad (35)$$

mit

$$m_{o'} = \int_0^\infty \langle \mu_z \rangle_o \; T_{o\to o'}(\tau_o)\; f_o(\tau_o)\; d\tau_o \; . \qquad (36)$$

Zur Berechnung der Signalkurven der benutzten Meßverfahren sei $K_{os} = 0$ gesetzt, es wird also angenommen die Laufzeitkorrelation könne bei diesen Messungen vernachlässigt werden. Dies wird nahegelegt, weil L_s sehr groß gegen L_o ist und L_o am Anfang der Strecke L_s liegt.

Substituiert man $t - t_{o'} = \tau_s$ und $t_{o'} - t_o = \tau_o$ mit $d\tau_s = -dt_{o'}$ und $d\tau_o = -dt_o$ und setzt man $K_{os} = 0$, dann folgt aus (35)

$$m_D(t) = \int_{-\infty}^{t} m_{o'}(t_{o'})\; T_{o'\to D}(t - t_{o'})\; f_s(t - t_{o'})\; dt_{o'} + m_D^{(R)} \quad . \qquad (37)$$

Darin ist

$$m_{o'}(t_{o'}) = \int_{-\infty}^{t_{o'}} \langle \mu_z \rangle_o \; T_{o\to o'}(t_{o'} - t_o)\; f_o(t_{o'} - t_o)\; dt_o \quad . \qquad (37')$$

m_D ist das mittlere Dipolmoment der mit (2) erklärten strömenden Menge N_D, die zur Zeit t aus der Strecke L_s in den Detektor einströmt. Der Zwischenwert $m_{o'}$ kann als das mittlere Dipolmoment einer Menge $N_{o'}$ angesehen werden, die zur Zeit $t_{o'}$ aus der Einstrahlstrecke L_o aus- und in

die Strecke L_s einströmt. Die Annahme der Korrelationsfreiheit hat zur Folge, daß das Gesamtsystem (35) in die zwei Subsysteme (37) und (37') getrennt werden kann. Die Menge $N_{o'}$ ist dabei entsprechend (2) zu definieren, $N_{o'} = I_o\, dt$.

Gemessen wird die Differenz

$$\Delta m_D(t) = m_D(0) - m_D(t) \quad , \tag{38}$$

die im folgenden als Signalkurve bezeichnet wird. Die Signalkurven der Meßverfahren 1 und 2 sind im Anhang 3 berechnet. Man erhält unter den Voraussetzungen, vergl. (A-28),

$$\sqrt{(\delta\tau_o)^2} \ll \bar{\tau}_o \ll \sqrt{(\delta\tau_s)^2} \ll \bar{\tau}_s \tag{39}$$

die folgenden Ergebnisse,

Sprungverfahren:

$$\Delta m_D(t) = 2\langle\mu_z\rangle_o \int_o^t e^{-t'/T_1} f_s(t')\, dt' \quad , \tag{40}$$

Impulsverfahren:

$$\Delta m_D(t) = 2\langle\mu_z\rangle_o\, e^{-t/T_1} f_s(t) \quad . \tag{41}$$

Für das Zwischenfeldverfahren schließt die Berechnung der Signalkurve an (35), mit $K_{os} = 0$ und (36) an. Auch bei diesem Verfahren wird die Resonanzfrequenz eingestrahlt und da es, wie bereits erwähnt, ein quasistationäres Verfahren ist, gilt (4) mit (6), also

$$T_{o\to o'} = \cos\omega_1\tau_o \approx e^{-\tau_o/T_1} \quad \text{und} \quad T_{o'\to D} = e^{-\tau_s/T_1} \quad .$$

Setzt man wegen $\tau_o \ll T_1$ den Faktor $e^{-\tau_o/T_1} = 1$, dann erhält man mit (33) schließlich die Signalkurve

$$\Delta m_D(\omega_1) = m_D(0) - m_D(\omega_1)$$
$$= \langle\mu_z\rangle_o \left[1 - F(\omega_1)\right] \int_o^\infty e^{-\tau_s/T_1} f_s(\tau_s)\, d\tau_s \quad , \tag{42}$$

mit

$$F_o(\omega_1) = \int_o^\infty \cos\omega_1\tau_o\, f_o(\tau_o)\, d\tau_o \quad ; \quad F_o(0) = 1 \quad . \tag{43}$$

$F_o(\omega_l)$ ist die Fouriertransformierte der Laufzeitverteilung $f_o(\tau_o)$. Da $F_o(\infty) = 0$ sein muß, gilt

$$F_o(\omega_l) = \frac{\Delta m_D(\infty) - \Delta m_D(\omega_l)}{\Delta m_D(\infty)} \quad . \tag{44}$$

Durch numerische Fouriertransformation gewinnt man aus $F_o(\omega_l)$ die Laufzeitverteilung $f_o(\tau_o)$.

5.2 Apparatur

5.21 Strömungsdetektor

Die als Motivation für Gleichung (1) und (5) aufgestellte Behauptung, das Signal sei proportional zum mittleren Dipolmoment der durch die Eintrittsfläche bei x_D in die Detektorspule einströmenden Dipole, soll jetzt begründet werden.

Zum Nachweis strömender Kerndipolmomente eignet sich jeder Detektortyp, der auch bei Kernresonanz an ruhender Substanz verwendet wird. Zur Signalspannung tragen alle Kerndipole bei die zur Meßzeit t im Innern der Detektorspule sind, ihre Anzahl sei N_V. Mit dem Induktionsgesetz gilt für die induzierte Spannung an der Detektorspule

$$U_i = - \mu_o \frac{z}{L_D} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N_V} \langle \mu_x \rangle_k (t) \quad . \tag{48}$$

Der Maßsystemfaktor μ_o und die Wicklungsdichte $\frac{z}{L_D}$ sind Konstanten. Die Detektorspule ist konzentrisch auf das Strömungsrohr gewickelt, das senkrecht zum Detektorfeld $\vec{B}_D$ in x-Richtung verläuft. Daher enthält (48) die x-Komponente des Erwartungswertes. In Anhang 1 ist eine Berechnung des Einteilchenerwartungswertes durchgeführt, man erhält, vergl. (A-18),

$$\langle \mu_x \rangle_k (t) = \langle \mu_z \rangle_D (t-\vartheta_k) \; A(\vartheta_k) \sin [\omega_D t + \phi(\vartheta_k)] \; . \tag{49}$$

Darin beschreibt $\sin(\omega_D t+\phi)$ die Kernspin-Präzession im Hochfrequenzfeld des Detektors mit der Frequenz ω_D. Die Amplitude $A(\vartheta_k)$ und die Phase $\phi(\vartheta_k)$ hängen von der Aufenthaltsdauer ϑ_k der Kerndipole im Detektorwechselfeld ab. Der Anfangswert $\langle \mu_z \rangle_D$ zum Einströmzeitpunkt $t-\vartheta_k$ ist von der Laufzeit τ_o und τ_s abhängig. Die Summe in (48) läßt sich daher in Teilsummen nach ϑ, τ_o und τ_s einteilen,

$$\sum_{k=1}^{N_V} \langle \mu_x \rangle_k (t) = \int_{N_V} \langle \mu_x \rangle (t, \vartheta, \tau_o, \tau_s) \; dN_V(\vartheta, \tau_o, \tau_s) \; . \tag{50}$$

Zuerst werde N_V in Teilmengen $dN_V(\vartheta)$ zerlegt, die von allen Teilchen gebildet werden, die mit einer Einströmmenge (2) zur Zeit $t-\vartheta$ in den Detektor einströmten und die zur Zeit t noch im Dtektor sind, also zu N_V gehören. Die Teilchen dieser Teilmenge besitzen Laufzeiten in der Einstrahlspule der Länge L_D, die größer als ϑ sind. Es ist daher

$$dN_V(\vartheta) = I_o\, d(t-\vartheta) \int_{\vartheta}^{\infty} f_D(\tau_D)\, d\tau_D \qquad (51)$$

die Restmenge der Einströmmenge $N_D(t-\vartheta)$. Zugleich sind alle $dN_V(\vartheta)$ disjunkte Teilmengen von N_V und ihre Summe ist

$$N_V = \int_{N_V} dN_V(\vartheta) = \int_0^{\infty} I_o \int_{\vartheta}^{\infty} f_D(\tau_D)\, d\tau_D\, d\vartheta \,. \qquad (52)$$

Für die weitere Zerlegung folgt wegen der statistischen Äquivalenz der Teilmengen $dN_V(\vartheta)$ und $N_D(t-\vartheta)$ zueinander und mit (23), daß die gemeinsame Laufzeitverteilung $f_{os}(\tau_o,\tau_s)$ für beide Mengen dieselbe ist,

$$\frac{dN_V(\vartheta,\tau_o,\tau_s)}{dN_V(\vartheta)} = \frac{dN_D(\tau_o,\tau_s)}{N_D} = f_{os}(\tau_o,\tau_s)\, d\tau_o\, d\tau_s \,. \qquad (53)$$

Die zweite Gleichung folgt aus (23) mit $N=N_D$. Da nach (51) $dN_V(\vartheta)$ eine Teilmenge von N_D ist, also alle Elemente von $dN_V(\vartheta)$ zugleich Elemente von N_D sind, gilt (53) solange keine Korrelation zwischen τ_o,τ_s einerseits und ϑ,τ_D andererseits besteht. Sind aber Laufzeiten untereinander korreliert, oder teilweise korreliert, dann läßt sich zeigen,daß (53) wenigstens näherungsweise gilt. Teilmengen N_D strömen in die Detektorspule ein und bilden N_V. Die Aufenthaltsdauer jeder Teilmenge N_D ist im Mittel $\bar{\tau}_D$. Das Ausströmen von Teilen der Menge N_D beginnt nach Ablauf der minimalen Laufzeit $\tau_{D,min}$. Es gilt also $dN_V(\vartheta) = N_D$, für $\vartheta < \tau_{D,min}$. Daher ist von der Menge N_V der Anteil $(\tau_{D,min}/\bar{\tau}_D)N_V$ bezüglich der genannten Korrelation nicht betroffen, da für diesen Anteil (53) gilt, weil $dN_V(\vartheta)=N_D$, mit $\vartheta < \tau_{D,min}$, ist. Die Korrelation kann also nur bezüglich des ausströmenden Teiles von N_V Einfluß nehmen. Da L_D sehr kurz ist, sollte die Verteilung $f_{L,T}$, (13), gelten, dann ist $\tau_{D,min} = \bar{\tau}_D/c \approx 0{,}8\,\bar{\tau}_D$, wobei der Zahlenwert aus Messungen folgt. Ein Korrelationseinfluß betrifft daher, wenn überhaupt, nur eine Teilmenge von der Größenordnung $(1-\tau_{D,min}/\bar{\tau}_D)N_V$

der Detektormenge N_V. Deshalb kann bezüglich des Detektors Korrelation vernachlässigt werden.

Aus (48) und (49) folgt dann mit (50),(51) und (53)

$$U_i = \mu_o \frac{z}{L_D} \frac{d}{dt} \int_o^\infty I_o \, m_D(t-\vartheta) \, A(\vartheta) \sin\left[\omega_D t + \phi(\vartheta)\right] \int_\vartheta^\infty f_D(\tau_D) d\tau_D \, d\vartheta, \quad (54)$$

mit der Abkürzung

$$m_D(t-\vartheta) = \iint_o^\infty \langle \mu_z \rangle_D (t-\vartheta, \tau_o, \tau_s) \, f_{os}(\tau_o, \tau_s) \, d\tau_o \, d\tau_s \quad . \quad (54')$$

In (54) tritt also der durch (1) bzw. (5) definierte Scharmittelwert m_D auf. Das Integral (54) über ϑ ist nur für $\vartheta \lesssim \bar{\tau}_D$ wesentlich von Null verschieden. Die t-Abhängigkeit des Scharmittelwertes (54') kommt durch die Einstrahlung im Zwischenfeld zustande. Ohne Einstrahlung oder bei Einstrahlung mit zeitkonstanter Amplitude ist m_D zeitkonstant. Zwar ist für Messungen zeitabhängige Einstrahlung notwendig, aber die Änderung von m_D ist stets so langsam, daß $m_D(t-\vartheta) = m_D(t)$ gesetzt werden kann. Außerdem kann bei der Differentiation nach t in (54) der Faktor m_D gegenüber dem schnell oszillierenden Faktor $\sin(\omega_D t + \phi(\vartheta))$ als zeitkonstant behandelt werden. Dann folgt aus (54)

$$U_i = m_D(t) \quad I_o \, F_D \quad (55)$$

mit einer Detektorfunktion

$$F_D = - \mu_o \frac{z\omega_D}{L_D} \int_o^\infty A(\vartheta) \cos(\omega_D t + \phi(\vartheta)) \int_\vartheta^\infty f_D(\tau_D) \, d\tau_D \, d\vartheta \quad . \quad (55')$$

Das Detektorsignal kann je nach Detektortyp aus Amplitude $A(\vartheta)$ oder Phase $\phi(\vartheta)$ der Hochfrewuenzspannung U_i gewonnen werden. Bei linearer Demodulation folgt für die Signalamplitude

$$U = \beta \, m_D(t) \quad . \quad (56)$$

Der Faktor β enthält die Stromstärke I_o und alle Detktorparameter. Das Strömungsmeßverfahren fordert also β = konst . Das heißt, alle Detektorparameter und die Stromstärke $I_o = \bar{v} \, q$ sind bei einer Messung konstant zu halten.

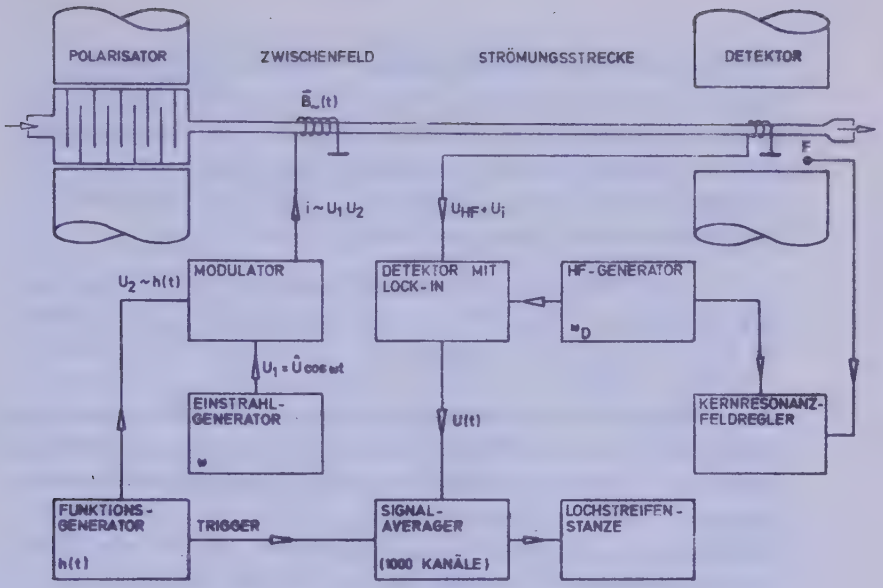


Bild 3 Blockschaltbild der Apparatur zur Messung von Laufzeitverteilungen.

5.22 Elektronik bei Laufzeitmessungen

Bild 3 zeigt einen Überblick der zur Durchführung der Experimente zusammengestellten Apparatur. Es sind drei Wirkungsgruppen erkennbar: Funktionsgenerator, Einstrahlgenerator und Modulator erzeugen das Einstrahlfeld in der Zwischenfeldspule; Detektorspule, Detektor und HF-Generator, sowie der Signal-Averager mit Stanze besorgen Messung und Registrierung der Meßkurven; ein Kernresonanz-Feldregler sorgt für die Konstanz des wichtigsten Detektorparameters.

Detektor ist ein unter dem Namen Amplitudenbrücke bekannter Kernresonanzdetektor [11] Von der Technik der Kernresonanzdetektoren ist bekannt, daß es Detektoren gibt, die bessere Signale und weniger Rauschen liefern als diese Amplitudenbrücke. Trotzdem wurde sie hier gewählt, weil dieser Detektortyp sehr stabil gegenüber Drift und Schwankungen eingestellter Detektorparameter ist, eine Forderung, die aus (56) folgt.

Durch den Kernresonanz-Feldregler wird der Resonanzabstand ($\omega_D - \gamma B_D$) konstant gehalten. Es wird die Resonanzfrequenz einer Fluorprobe F mit der Detektorfrequenz verglichen und ein Regelsignal gebildet. Dieses wirkt auf das Netzgerät des Magneten und auf eine Zusatzwicklung am Magneten. Beide sind in Bild 3 nicht dargestellt. Der Regelkreis wurde schon von G.Abend [10] beschrieben.

Ein Funktionsgenerator liefert die Zeitfunktion h(t), also je nach Meßverfahren, (31),(32) oder (33) und außerdem ein Trigger-Signal als Startsignal für die Messung.

Der Strom i(t) durch die Einstrahlspule wird im Modulator als das Produkt $h(t)\ U_1 \cos \omega t$ gebildet. Dazu wird ein Hall-Multiplikator verwendet der in einem Frequenzbereich 0 bis 10 kHz das Produkt zweier Spannungen bildet. Ausgangsschaltung des Modulators ist eine Stromquelle,die durch Operationsverstärker aufgebaut ist. Der Klirrfaktor des Ausgangsstromes war kleiner als 0,5% . In den Fällen, in denen h(t) ein Sprung oder Impuls ist, ist wegen (A-27) oder (A-31) die Diskussion mit der idealisierten Funktion gerechtfertigt, wenn die elektronische Schaltzeit sehr klein ist gegen die kleinste Zeit, die in der Ungleichung (39) vorkommt. Dies wurde sehr gut realisiert.Eine weitergehende Beschreibung dieses Einstrahl-Modulators findet sich bei H.Girke[9].

Die Signalspannung U(t) (56), wird einem Signal-Analyzer (Typ: hp 5480A) zugeführt. Bei den Messungen nach Meßverfahren 4 wird jeder Meßpunkt quasi stationär gemessen. Der Signal-Analyzer diente dabei als Datenerfassungsgerät, es wurde eine Meßkurve erfaßt und auf den Lochstreifen übertragen. Die Meßdauer betrug 500 s bei 0,5 s/Meßpunkt. Die Zeitkonstante des Tiefpaßfilters im Lock-in war dabei auf 0,1 bis 0,5 s eingestellt. Bei den Messungen nach Meßverfahren 1 oder 2 ist die Meßgeschwindigkeit entsprechend der Breite der Meßkurve zu wählen. Die kleinste mittlere Laufzeit war $L/\bar{v} \approx 50\ \text{cm}/250\ \text{cm}\ \text{s}^{-1} = 200$ ms, die Breite der Verteilung von der Größenordnung 40 ms. Dagegen muß die Zeitkonstante des Meßsystems klein sein. Bild 4 zeigt die Übergangsfunktion des Meßsystems. Es ist die Signalspannung U(t) aufgetragen, die eine Eingangsspannung mit geschalteter Modulation erzeugt. Kurve 1 wurde ohne Schmalbandverstärker und ohne Tiefpaßfilter gemessen, Kurve 2 mit Schmalbandverstärker aber ohne Tiefpaßfilter und die Kurven 3 bis 5 wurden mit verschiedenen Filterzeitkonstanten erhalten wie

sie bei den Laufzeitmessungen eingestellt wurden. In Kurve 1 und 2 ist eine Schwankung der doppelten Modulationsfrequenz zu erkennen. Um diese kleinen Zeitkonstanten zu erhalten, muß die Modulationsfrequenz entsprechend groß sein. Unter dieser Voraussetzung und mit dem im Anhang 1 Fall c diskutierten Zusammenhang wurden die Detektorparameter optimiert. Entsprechend der kurzen Zeitkonstanten des Meßsystems ist der in der Signalspannung U(t) enthaltene Rauschanteil bei den Messungen nach Verfahren 1 und 2 weit größer als bei Meßverfahren 4. Bei vielen Messungen war der Rauschanteil in U(t) ein Vielfaches des Signalanteils Durch Mittelwertbildung über viele Messungen, die das Rechenwerk des Signal-Analysers digital ausführt, war letztlich auch bei Messungen nach Verfahren 1 und 2 das S/R-Verhältnis der erfaßten Meßkurve vergleichbar mit den Meßkurven, die nach Verfahren 4 erfaßt wurden. Die Werte sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1

S/R	Sprung-verfahren	Impuls-verfahren	Zwischenfeld-verfahren
$\bar{v}$ = 300 cm s^{-1}	300	80	300
$\bar{v}$ = 35 cm s^{-1}	20	6	20

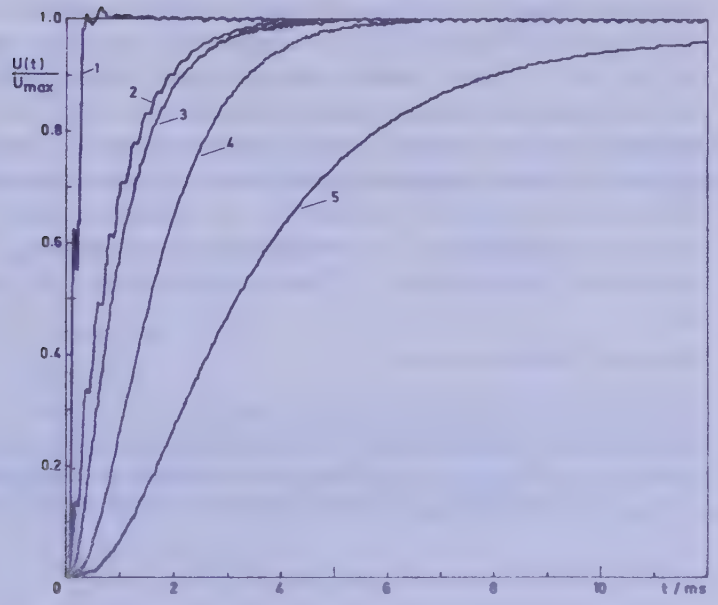


Bild 4 Übergangsfunktion des Meßsystems

5.23 Strömung bei Laufzeitmessungen

Durch geeignete Dimensionierung des Strömungskreislaufs können einige vorn genannte Bedingungen erfüllt werden, die Forderung nach stationärer Strömung $\bar{v}$ = konst, die Forderung nach stationärem Anfangswert $\langle \mu_z \rangle_o$ = konst, die Forderung nach homogenen Anfangswerten $\langle \mu_z \rangle_{o,i} = \langle \mu_z \rangle_{o,j} = \langle \mu_z \rangle_o$ für alle Teilchen und die Forderung nach möglichst großem Detektorsignal. Die erste Forderung ist schon bei (2) von Bedeutung, zusammen mit der zweiten Forderung werden z.B. in (5) und (54') die Mittelwerte zeitkonstant. Mit der dritten Forderung werden die verschiedenen Meßverfahren bezüglich ihrer Grundmengen statistisch äquivalent, denn wie bei der Definition (8c) erwähnt, hängt die Laufzeitverteilung davon ab wie die Grundmenge zusammengesetzt ist. Bei den Messungen werden Stichproben durch Impuls- oder Sprung-Einstrahlung, oder durch Einströmen in das Zwischenfeld gebildet. Diese verschiedenen Bildungen sind gleichwertig, wenn die Grundmenge N_D , der alle Stichproben entnommen werden, homogen ist. Großes Detektorsignal ist nach (56) und (A-30') nicht nur eine Frage der Einstellung des Detektors, sondern fordert auch optimale Dimensionierung des Strömungskreislaufes, wozu (A-11), Anhang 1, dient.

Die Stationarität der Strömung wird einerseits durch die Länge der Einlaufstrecke L_{So} und andererseits durch elastische Schläuche erreicht. Die Länge der Einlaufstrecke wird als ausreichend angesehen, wenn $(L_{So}/R) \gtrsim 100$ ist[6]. Die Strömung wird durch eine Kreiselpumpe gefördert. Die Pumpe saugt die Flüssigkeit aus einem Behälter und drückt sie durch Polarisator und Meßstrecke. Dazwischen befindet sich ein langer, dünnwandiger PVC-Schlauch größeren Durchmessers, der infolge seiner Elastizität ähnlich wirkt wie ein Windkessel*). Im Strömungskreislauf befindet sich ein Durchflußmeßgerät, womit die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ aus Durchfluß $Q=\bar{v}q$ und Rohrquerschnitt q, also unabhängig von der Laufzeit bestimmt wird.

---

* Für die Experimente stand kein Strömungslabor zur Verfügung, sodaß die Forderung nach stationärer Strömung mit einfachsten Mitteln erfüllt werden mußte. Das Ziel der Arbeit, das Grundsätzliche des Meßverfahrens zu diskutieren, rechtfertigt den Verzicht auf eine Nuance Meßgenauigkeit, die durch größeren Aufwand in dieser Richtung wohl noch zu erzielen wäre.

Gleicher Erwartungswert für viele Teilchen läßt sich am Ausgang des Polarisators erreichen. Nach (A-11) muß dazu die Aufenthaltsdauer im Polarisator groß gegen T_1 sein, dann haben Laufzeitdifferenzen einzelner Teilchen keinen Einfluß mehr auf ihren Erwartungswert am Polarisatorausgang. Fast gleicher Anfangswert an der Stelle x_o besteht, wenn die Laufzeitstreuung auf der Strecke L_{So} klein ist. Um die Streuung des Anfangswertes abzuschätzen, berechnen wir aus (A-11) mit $\tau = \bar{\tau} + \delta\tau$ und mit der Voraussetzung $\delta\tau \ll T_1$

$$\langle \mu_z \rangle_o = \langle \mu_z \rangle_{P,\infty} \left(1 - e^{-\frac{\tau_P}{T_1}} \right) e^{-\frac{\tau_{So}}{T_1}}$$

$$\approx \langle \mu_z \rangle_{P,\infty} \left[1 - e^{-\frac{\bar{\tau}_P}{T_1}} \left(1 - \frac{\delta\tau_P}{T_1}\right) \right] e^{-\frac{\bar{\tau}_{So}}{T_1}} \left(1 - \frac{\delta\tau_{So}}{T_1}\right) . \qquad (57)$$

Berechnet man daraus das Schwankungsquadrat und vernachlässigt Korrelationen, so erhält man

$$\overline{(\delta\langle \mu_z \rangle_o)^2} = \overline{\langle \mu_z \rangle_o^2} - \overline{\langle \mu_z \rangle_o}^2 \qquad (58)$$

$$\approx \langle \mu_z \rangle_{P,\infty} \left[e^{-\frac{2\bar{\tau}_P}{T_1}} \frac{\overline{(\delta\tau_P)^2}}{T_1^2} + \left(1 - e^{-\frac{\bar{\tau}_P}{T_1}}\right)^2 e^{-\frac{2\bar{\tau}_{So}}{T_1}} \frac{\overline{(\delta\tau_{So})^2}}{T_1^2} \right] .$$

Weil die Strömung im Polarisator fast laminar aber in der Einlaufstrecke turbulent ist, gilt für die mittleren relativen Laufzeit-Schwankungsquadrate

$$\overline{(\delta\tau_P)^2} / \bar{\tau}_P^2 \gg \overline{(\delta\tau_{So})^2} / \bar{\tau}_{So}^2 ,$$

und für die Laufzeiten gilt

$$\bar{\tau}_P \gg T_1 \gtrsim \bar{\tau}_{So} ,$$

denn diese Dimensionierung folgt, wie anschließend gezeigt wird, aus der Forderung nach großem Detektorsignal. Wegen $\tau_{So} \lesssim T_1$ ist im 2. Summanden von (58) der gemischte Exponentialfaktor von der Größenordnung $e^{-2} = 0{,}13$.

Mit steigender Geschwindigkeit $\bar{v} = L_{So}/\bar{T}_{So}$ wird $\overline{\delta(\langle\mu_z\rangle_o)^2}$ größer. Damit dabei der erste Summand in (58) nicht überwiegt, muß der Faktor

$$\alpha_P = e^{-\bar{\tau}_P/T_1} = e^{-\frac{V_P}{q\,\bar{v}\,T_1}} < \alpha_P^* \qquad (59)$$

bleiben. Der Wert α_P^* gehört bei sonst gegebener Dimensionierung zu der für Strömungsexperimente maximal zulässigen Geschwindigkeit. Es ist daher

$$\bar{v}_{max} = \frac{-V_P}{q\,T_1\,\ln(\alpha_P^*)} \quad , \qquad (60)$$

und wenn statt der Geschwindigkeit die Reynoldszahl $Re = \bar{v}\,2R\,\rho/\eta$ betrachtet wird, dann ist

$$Re_{max} = \frac{-V_P\,\rho}{\pi\,\eta\,T_1\,R\,\ln(\alpha_P^*)} \quad . \qquad (60')$$

Der Rohrdurchmesser 2R wird festgelegt durch die Forderung, daß der Erwartungswert des am Detektor eintreffenden Dipolmomentes, auch bei kleiner Geschwindigkeit ausreichend groß sein soll. Nach (A-11) und (4'') ist das Verhältnis des wesentlichen Anteils des Erwartungswertes $\langle\mu_z\rangle_D$ zum Erwartungswert am Polarisatorausgang das geeignete Maß um diese Forderung zu quantifizieren. Wesentlicher Anteil ist dabei wegen des Strömungs-Meßverfahrens, das auf der Differenzbildung (38) beruht, diese Differenz. Es soll also der Faktor

$$\alpha_D = \frac{\langle\mu_z\rangle_D - \langle\mu_z\rangle_D^{(R)}}{\langle\mu_z\rangle_{P,\infty}\,(1-\alpha_P)} = e^{-\frac{x_D - x_P}{\bar{v}\,T_1}} > \alpha_D^* \qquad (61)$$

sein, und damit wird die minimale Geschwindigkeit festgelegt. Bei den Strömungsmessungen soll oberhalb der kritischen Reynoldszahl gemessen werden. Dann läßt sich aus (61) der Rohrdurchmesser bestimmen, wenn Re_{min} diese minimale Reynoldszahl und $x_D - x_P = \beta R$ die Gesamtlänge ist;

$$R^2 = \frac{-\eta\,Re_{min}\,T_1\,\ln(\alpha_D^*)}{\rho\;2\,\beta} \qquad (62)$$

Für die Messungen dieser Arbeit war $Re_{min} \approx Re_{krit} = 2300$. Mit den weiteren Zahlenwerten folgt aus (62) der Rohrdurchmesser zu 2R=0,5 cm.

Die Zahlenwerte ß=1500 und α_D^*=0,05 wurden durch Vorversuche festgelegt. Weiter war η/ρ=0,01 $cm^2 s^{-1}$ und T_l=2,75 s . Nach Festlegung des Durchmessers folgt dann mit V_p=800 cm^3 und α_p^*=0,02 die maximale Reynoldszahl Re_{max}= 20 000. Das Volumen V_p ist durch die Größe des Magneten vorgegeben.

Als Strömungsrohr wurde ein 375 cm langer, dickwandiger PVC-Schlauch von 0,5 cm Innendurchmesser verwendet. Die Einstrahlspule war auf dem Strömungsrohr verschiebbar, ihre Länge betrug 0,5 cm . Die Detektorspule von 1 cm Länge befand sich am Ende der Meßstrecke. Zu Messungen nach Verfahren 1 und 2 wurde die Einstrahlspule verschoben, damit wurden Längen von 50 cm bis 300 cm eingestellt. Bei den Messungen nach Meßverfahren 4 befand sich eine 15 cm lange Spule mit Abgriffen 1 cm, 3 cm und 7 cm in der Mitte der Strecke. Wegen der Forderung nach Homogenität des Zwischenfeldes wurde darauf verzichtet die Länge größer als 15 cm zu wählen.

5.3 Ergebnisse

5.31 Die Meßkurven

Die Laufzeitverteilungen werden aus den gemessenen Signalkurven berechnet, die bei der Messung auf Lochstreifen erfaßt wurden. Die Signalkurven sind für die einzelnen Meßverfahren in (40),(41) und (44) angegeben. Aus diesen Gleichungen folgten jeweils die Rechenvorschrift zur numerischen Berechnung der Laufzeitverteilungen. Neben den Signalkurven wurden alle wesentlichen Parameter erfaßt, wie Temperatur, Durchflußmenge, Feldstärke, Impulszeit usw. Die Relaxationszeit T_1 wird mit der Beziehung (A-6) bestimmt. Der bei den einzelnen Signalkurven auftretende Faktor $\langle \mu_z \rangle_o$ ist zwar stationär, aber nach (A-11) von $\bar{v}$ abhängig. Er wird dadurch eliminiert, daß die Signalkurven nach der Umrechnung noch normiert werden. Als Ergebnis zeigt Bild 5 eine Auswahl Laufzeitverteilungen, die vom Sichtgerät der Rechenanlage fotografiert wurden. Die ausgezogenen Kurven sind Meßkurven*), die anderen sind berechnete Laufzeitverteilungen nach (13), K-Verteilungen, und nach (19), D-Verteilungen, die durch Anpassung an die Meßkurven erhalten wurden. In Bild 5 und in den folgenden Fotografien sind Kurvenausschnitte dargestellt, die den zentralen Teil der Verteilungen zeigen. Der Maßstab wurde wie folgt gewählt,

$$X = \frac{\tau_L - \bar{\tau}_{L,D}}{\sqrt{(\delta\tau_L)^2_D}} \qquad Y = \sqrt{(\delta\tau_L)^2_D}\; f_L(\tau_L) \quad . \tag{63}$$

mit $\bar{\tau}_{L,D}$ nach (20) und $(\delta\tau_L)^2_D$ nach (21) .
Die Kurven sind von X = - 2 bis X = 3 dargestellt.

Die in Bild 5 dargestellten Meßkurven wurden mit dem Zwischenfeldverfahren bei L = 3cm und L = 15cm und mit dem Impulsverfahren bei L=75 cm gemessen. Für Meßstrecken, die größer als 50 cm sind, wurden zwei Meßverfahren benutzt, das Impulsverfahren und das Sprungverfahren. Dazu zeigt Bild 6 für L=150 cm eine Gegenüberstellung dieser Verfahren. Aus Bild 5 geht visuell und aus einem Vergleich der aus den Meßkurven berechneten Parameter geht numerisch hervor, daß die zwei Verfahren im Rahmen der Meßgenauigkeit gleiche Meßergebnisse liefern.

---

* Die durch Umrechnung aus den Signalkurven erhaltenen Laufzeitverteilungen werden im Gegensatz zu den nach (13) und (19) berechneten Verteilungen Meßkurven genannt. Die durch (13) beschriebene Verteilung wird im folgendem K-Verteilung, die durch (19) beschriebene Verteilung wird D-Verteilung genannt.

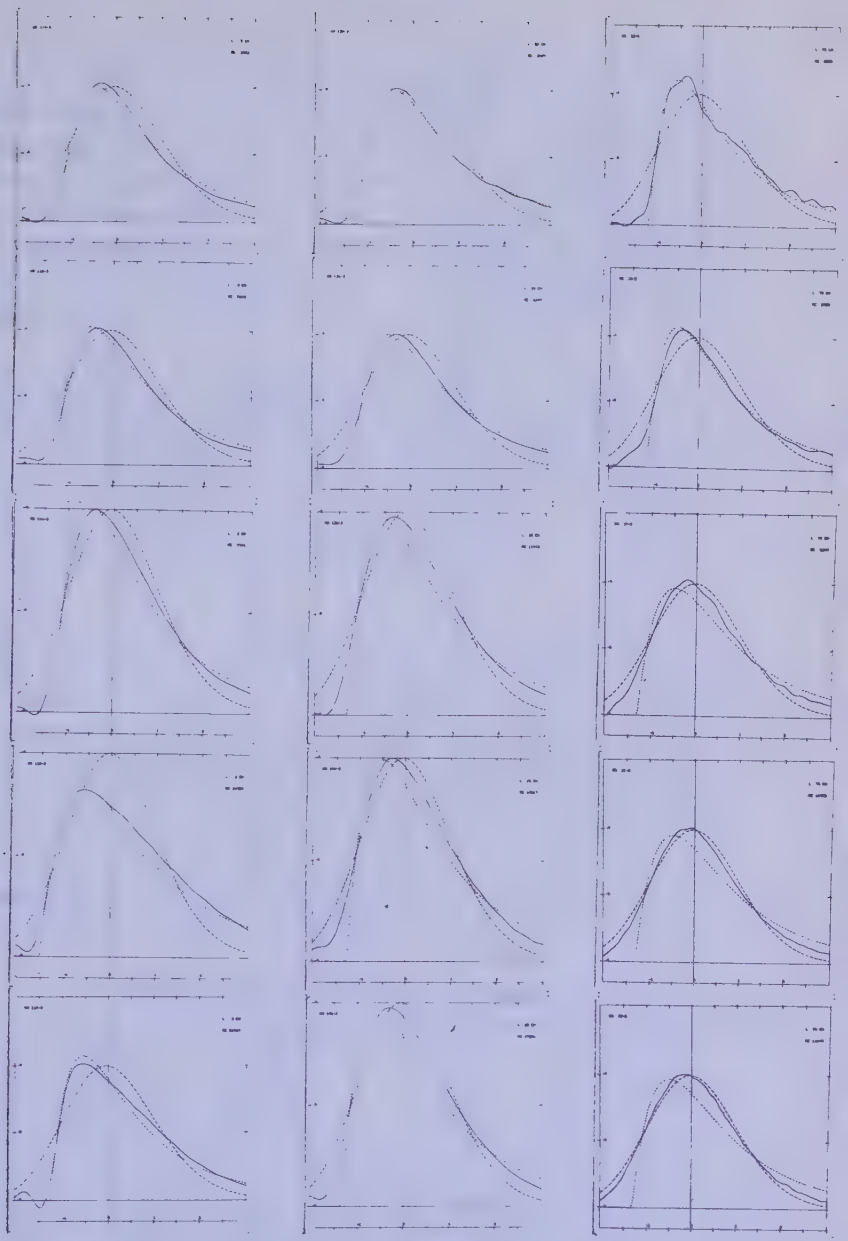


Bild 5 Vergleich der Laufzeitverteilungen. Meßkurven glatt, D-Verteilung grob und K-Verteilung fein gestrichelt. Reynoldszahl nach unten steigend.

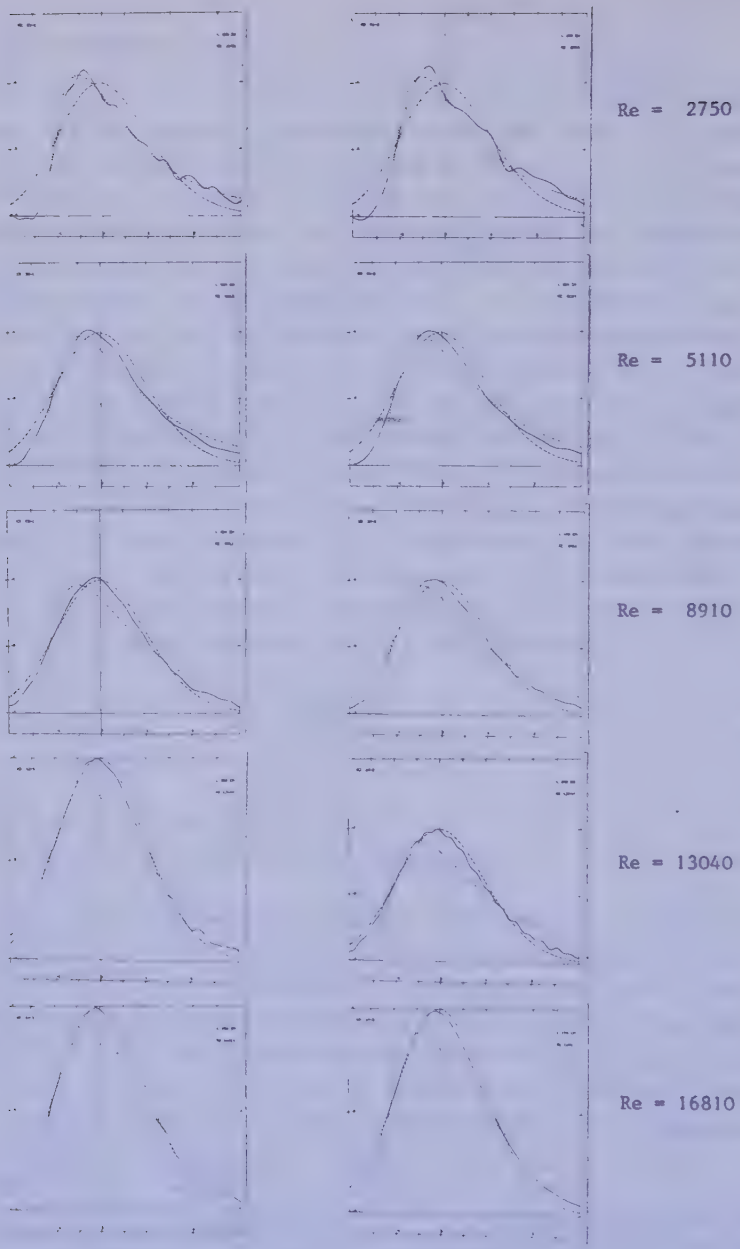


Bild 6 Vergleich der Meßverfahren.

Bild 6 ist zugleich eine weitere Spalte der Darstellung von Bild 5 . Wie die Bilder 5 und 6 zeigen, sind die Meßkurven bei kurzen Meßstrecken und langsamer Strömung, also auf den linken und oberen Bildern, der K-Verteilung (13) ähnlich. Bei längeren Strecken und bei größerer Geschwindigkeit, also auf den Fotos unten rechts, sind die Meßkurven den D-Verteilungen (19) näher.Dies ist eine erste, qualitative Bestätigung des oben bei Diskussion von Laufzeitverteilung und Laufzeitkorrelation vermuteten Zusammenhangs.

Die Anpassung der Kurven $f_{L,K}(\tau\ ;\ \bar{\tau}_T,\ \overline{\delta\tau_T^2})$ und die von $f_{L,D}(\tau;\ \bar{\tau}_D,\ \overline{\delta\tau_D^2})$ an die Meßkurven $f_L(\tau)$ erfolgt nach einem Iterationsverfahren, dem die Methode der kleinsten Quadrate zugrunde liegt. Das Verfahren liefert die Parameter der Funktion, für welche die Quadratsumme

$$Q_J = \sum_{i=k_1}^{k_2} \left[f_L(\tau_i) - f_{L,J}(\tau_i) \right]^2 \qquad (64)$$

(J = K oder D)

minimal wird. Als Grenzen des Anpassungsbereichs $\tau_{k_2} - \tau_{k_1}$ wurde der zentrale Bereich der Meßkurven gewählt, in dem die Meßwerte eindeutig größer als das Rauschen sind; das ist ein etwas breiterer Bereich als in den Bildern 5 und 6 dargestellt.

Als ein Maß für die Anpassung dient der relative Anpassungsfehler

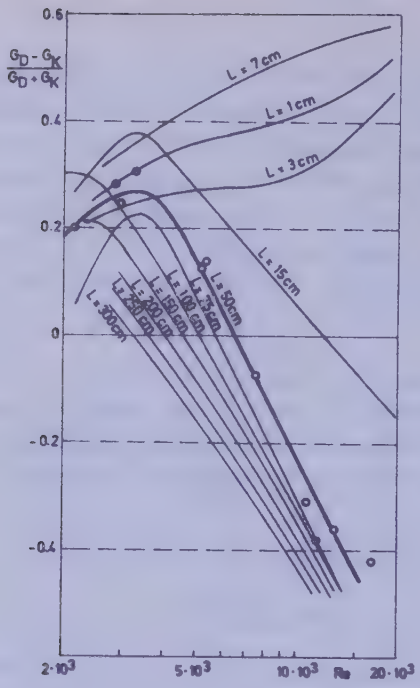
$$G_J = \frac{1}{f_{L,max}} \sqrt{\frac{Q_J}{k_2 - k_1}} \qquad (65)$$

(J = K oder D)

Um die oben qualitativ beschriebene Tendenz zu erfassen, werde die Größe

$$\frac{G_D - G_T}{G_D + G_T} = G(L,Re)$$

betrachtet. Sie ist positiv, wenn die K-Verteilung besser als die D-Verteilung paßt, im anderen Fall negativ. Bild 7 zeigt dieses Anpassungsmaß über der Reynoldszahl für die Längen 1 bis 300 cm .



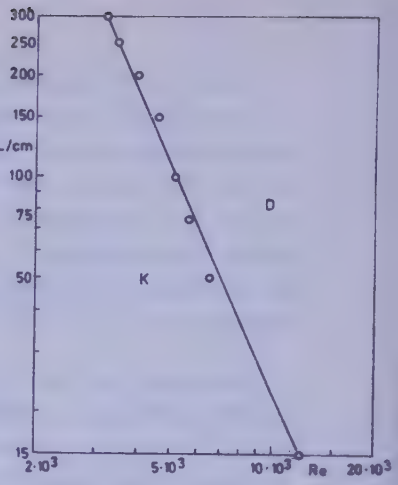


Bild 7 Anpassungsmaß

Bild 7a Anpassungsgrenze

Eingetragen sind mittlere Kurven; als Beispiel für die Streuung des Anpassungsmaßes sind die Meßpunkte für L = 50 cm eingetragen. Sieht man die Nulldurchgänge in Bild 7 als Grenze zwischen K-Anpassung und D-Anpassung an, so erhält man die Anpassungsgrenze, die in Bild 7a eingetragen ist. Die Laufzeitverteilung der Rohrströmung von 0,5 cm Durchmesser geht also dann merklich gegen die D-Verteilung, wenn gilt $L\,Re^2 \gg 3\,10^9 cm$.

Paßt man an die Meßkurve eine gemischte Verteilung an

$$f_{L,M}(\tau) = K\, f_{L,K} + (1-K)\, f_{L,D} \qquad (66)$$

dann läßt sich für alle Kurven bei Reynoldszahlen im turbulenten Bereich, der Anpassungsfehler G_M auf etwa 2 % reduzieren. Als Beispiel für diese Verbesserungen sind in Bild 8 die Anpassungsfehler G_K, G_D und G_M in Abhängigkeit von der Reynoldszahl aufgetragen.

Bild 9 zeigt den Faktor K(L,Re), der bei Anpassung der Mischverteilungen (66) erhalten wird.

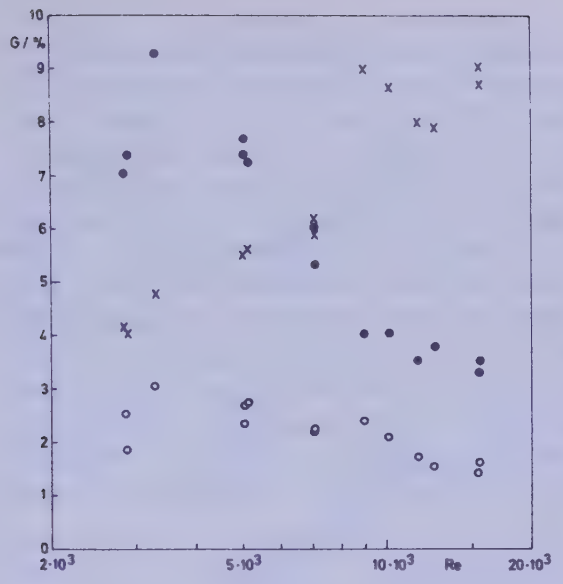


Bild 8

Anpassungsfehler

Länge der Meßstrecke L=50 cm

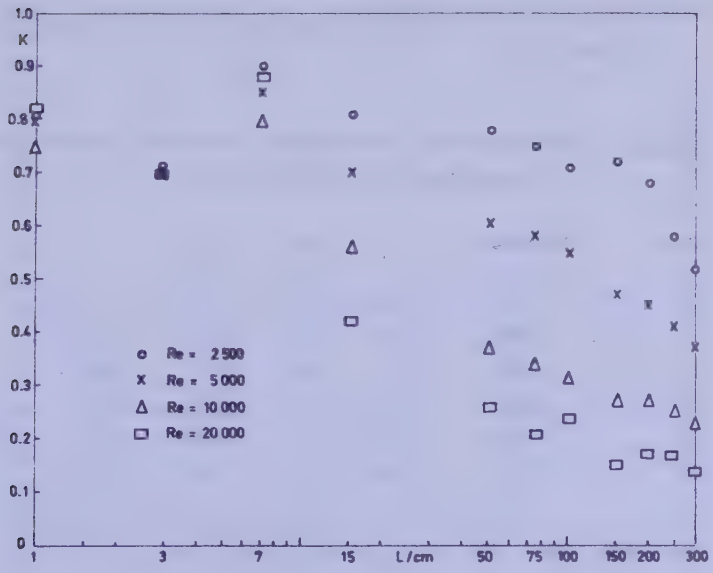
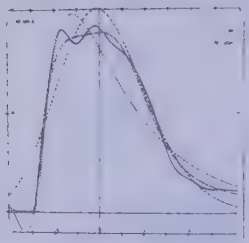
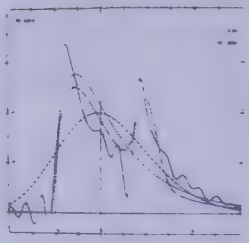


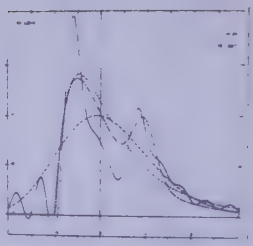
Bild 9 Faktor K(L,Re) der Mischverteilung $f_{L,M}=K\ f_{L,K}+(1-K)\ f_{L,D}$.



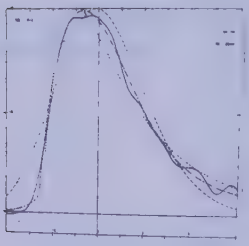
L= 1 cm Re = 2380



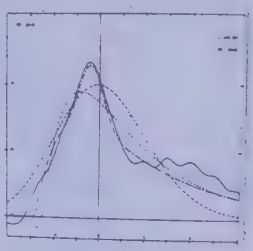
L= 3 cm Re = 2250



L= 15 cm Re = 2390



L= 50 cm Re = 2840



L=100 cm Re = 1870

Bild 10 Beispiele von Meßkurven aus dem Übergangsgebiet zu laminarer Strömung mit Anpassung einer gemischten Verteilung (strich-punktiert.

Tabelle 2 Anpassungsfehler und K-Faktor der Verteilungen von Bild 10 im Übergangsbereich laminar-turbulent.

Länge cm	Reynolds-zahl	G_K %	G_D %	G_M %	K
1	2380	7,8	9,7	3,4	0,79
3	2250	14,9	18,6	10,5	0,83
15	2390	10,0	12,7	8,0	0,85
50	2840	7,6	3,4	1,7	0,72
100	1870	8,6	13,4	5,9	0,88

Bild 10 zeigt Meßkurven die sich weder an die K- noch an die D-Verteilung anpassen lassen. Solche Laufzeitverteilungen traten nur in der Nähe der kritischen Reynoldszahl auf. Rohrströmungen im Übergangsgebiet laminar-turbulent wurden von Schlichting[12] untersucht. Danach wird angenommen, daß in diesem Gebiet zwei Strömungsformen, eine laminare und eine turbulente, nebeneinander existieren. Lokal betrachtet pendelt die Strömung von einer Form in die andere. Die in Bild 10 gezeigten Meßkurven sind mit dieser Vorstellung verträglich. Eine Untersuchung solcher Fragen soll hier aber nicht erfolgen, da dieses Übergangsgebiet an der Grenze des eingestellten Geschwindigkeitsbereiches liegt. Es wäre dazu die in Abschnitt 5.23 beschriebene Optimierung für den anderen Geschwindigkeitsbereich durchzuführen. In Tabelle 2 sind zu den in Bild 10 gezeigten Meßkurven und Anpassungen der K-Faktor und die Anpassungsfehler aufgeführt.

5.32 Parameter der Laufzeitverteilung

Parameter der beiden Grenzverteilungen sind der Exponent ν in der K-Verteilung und die Diffusionskonstante D in der D-Verteilung. Beide können aus den Meßkurven gewonnen werden und zwar nach zwei Verfahren. Bei dem ersten Verfahren werden die oben beschriebenen Anpassungen quantitativ ausgewertet. Das andere Verfahren verwendet die Momente der gemessenen Laufzeitverteilungen.

Zuerst wird das Anpassungsverfahren behandelt. Die K-Verteilung (13) enthält neben L und $\bar{v}$ den Parameter ν, der von L unabhängig sein muß, weil (13) aus der lokalen Realtion (13') hergeleitet wurde. Die D-Verteilung enthält neben L und u_o den Parameter D, der von L unabhängig sein muß, denn er wurde mit dem Ansatz (16) als Konstante eingeführt und bei der Lösung von (16') als Konstante behandelt. Es ist also ν im Geltungsbereich der Gleichung (13) und D im Geltungsbereich der Gleichung (19) von L unabhängig. Überschreitet man den Geltungsbereich der K-Verteilung bezüglich L und verwendet trotzdem (13) mit ν^* statt ν zur Anpassung an die Meßkurven, dann wird der so ermittelte Exponent ν^* von L abhängig. Überschreitet man, analog dazu, den Geltungsbereich der D-Verteilung und verwendet trotzdem (19) mit D^* statt D zur Anpassung an die Meßkurven, dann wird die so ermittelte Größe D^* L-abhängig. Dieses Verfahren gibt einen qualitativen Überblick über den Geltungsbereich der K-Verteilung bzw. der D-Verteilung in bezug auf die Variable L . Die Verteilungsparameter ν bzw. D sind dann die Grenzwerte im jeweiligen Geltungsbereich: $\nu = \nu^*(L \to 0)$ bzw. $D = D^*(L \to \infty)$. Das Ergebnis dieses Verfahrens ist in Bild 11 und in Bild 12 für verschiedene Reynoldszahlen dargestellt.

In Bild 11 ist $1/\nu^*$ über L aufgetragen. Für den Grenzwert ν ist ein Vergleich mit Geschwindigkeitsfeld-Messungen möglich. Zunächst führen theoretische Betrachtungen, im wesentlichen Dimensionsbetrachtungen*) zu der Aussage, daß die Geschwindigkeitsverteilung der Rohrströmung als Funktion der Radialkoordinate r und der Rohrwiderstandszahl λ_w**)darstellbar ist, also $v = v(r,\lambda_w)$. Messungen von Nunner [13], die speziell die Approximation [12] betreffen, also $v = v(r,\nu)$, bestätigen die Gleichheit beider Funktionen mit $\nu^2 = \lambda_w$. Die Rohrwiderstandszahl für turbulente Strömung in

---

*) Vergl. z.B. Hinze: a.a.O. Seite 519

**) Die Rohrwiderstandszahl ist definiert durch $dP/dx = -\lambda_w \bar{v}^2/4R$, worin P der Druck und ρ die Dichte der Flüssigkeit sind.

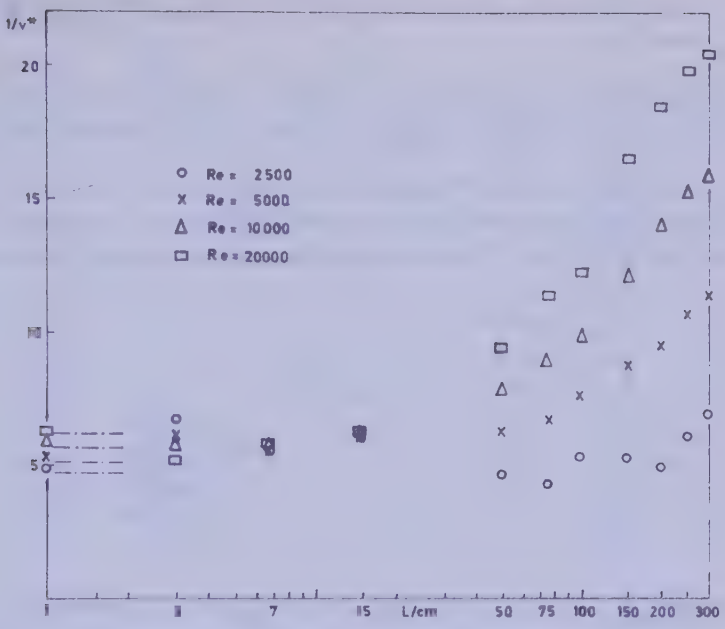


Bild 11 Reziprokwert des Exponenten ν^*, gewonnen durch Anpassung von K-Verteilungen an die Meßkurven. Strichpunktiert: Grenzwerte $1/\nu = 1/\nu^*(L\to 0)$, berechnet nach (67).

glatten Rohren hängt aber nach Blasius nur von der Reynoldszahl ab[14]. Mit $Re = \bar{v}\, 2R\, \rho/\eta$ gilt dann, nach Nunner und Blasius:

$$\nu^2 = \lambda_w = 0{,}3164 \quad Re^{-1/4} \,. \tag{67}$$

Die in Bild 11 strichpunktiert eingezeichneten Geraden wurden mit (67) berechnet. Die Meßwerte sind damit verträglich.*)

In Bild 12 ist der Diffusionsfaktor $D^* = D^*(L)$ aufgetragen. Parameter ist auch hier die Reynoldszahl. Über die Abhängigkeit des Grenzwertes $D = D^*(L\to\infty)$ von der Reynoldszahl liegen keine theoretischen Anhaltspunkte vor. Die Meßwerte in Bild 12 sind verträglich mit der Annahme, daß D garnicht oder nur sehr schwach von der Reynoldszahl ab-

*) Gute Übereinstimmung bei $L \approx 1$ ist zu erwarten, wenn das Anpassungsverfahren gut gegen seinen Grenzwert konvergiert. Messungen der Geschwindigkeitsfeldkorrelation (EULER-Korrelation) mit einem Laser-Anemometer[15] zeigen, daß die Korrelationslänge der longitudinalen Geschwindigkeitskorrelation in Rohrachse bei Re = 28600 etwa gleich 0,8 R ist (das sind hier 0,4 cm).

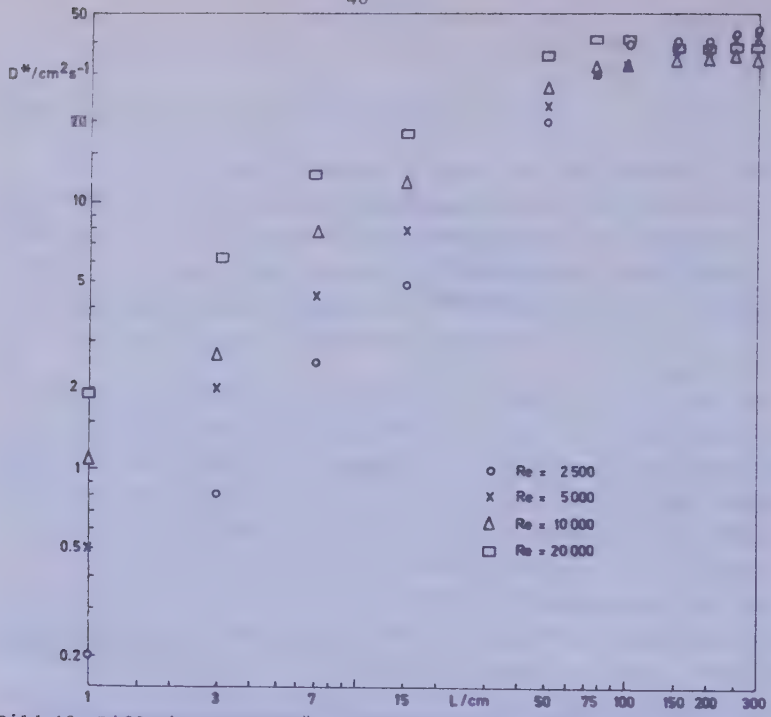


Bild 12 Diffusionsfaktor D*, gewonnen durch Anpassung von D-Verteilungen an die Meßkurven.

hängt (siehe jedoch die Diskussion der Temperaturabhängigkeit aus S. 49). Setzt man Unabhängigkeit von Re voraus, dann läßt sich aus den Meßwerten im Geltungsbereich der D-Verteilung ein Mittelwert gewinnen. Als im Geltungsbereich der D-Verteilung liegend werden dabei alle Messungen angesehen, deren Längen $L > 100$ cm sind und für die die Beziehung $L\,Re^2 > 1{,}5\ 10^{10}$ cm gilt. Die erste Bedingung wird durch Bild 12 nahegelegt und die zweite durch Bild 7a; dort hat die "Anpassungsgrenze" den Wert: $L\,Re^2 = 3\ 10^9$ cm. Es ist jedoch zweckmäßig Mittelwert und Streuung aus den in Bild 12 eingetragenen Werten zu berechnen, denn diese sind durch Interpolation*) aus Meßwerten gewonnen und tragen daher unterschiedliches statisches Gewicht.

---

*) In Bild 12, wie auch in den Bildern 9, 11 und 13 sind nur 4 Reynoldszahlen als Parameter angegeben. Messungen sind aber bei 10 bis 15 Geschwindigkeiten zu jeder Länge ausgeführt worden, und zwar so, daß der Bereich $2000 < Re < 20000$ überdeckt wurde. Die in den Bildern eingetragenen Meßpunkte sind daraus durch Interpolation bezüglich der Reynoldszahl (bei fester Länge) gewonnen worden.

Als mittleren Wert der Diffusionskonstanten erhält man aus allen Messungen die im Geltungsbereich der D-Verteilung liegen: $\bar{D}=\bar{D}\,(L\to\infty)= 36 \pm 5\ cm^2 s^{-1}$.

Das andere Verfahren zur Bestimmung der Parameter ν und D beruht auf den Gleichungen (22a) und (22b) und der folgenden Grenzwertbetrachtung. Dazu werden aus den Meßkurven zuerst die Momente $\bar{\tau}_L$ und $\overline{\delta\tau_L^2}$ durch numerische Integration berechnet. Dafür gilt

$$\bar{\tau}_L = \int_{\tau_{k1}}^{\tau_{k2}} \tau_i \quad f_L(\tau_i) \quad d\tau_i \quad , \tag{68}$$

$$\overline{(\delta\tau_L)^2} = \int_{\tau_{k1}}^{\tau_{k2}} (\tau_i-\bar{\tau}_L)^2 f_L(\tau_i) \quad d\tau_i \quad , \tag{69}$$

mit den Größen τ_{k1} und τ_{k2} wie bei (64). In Bild 13 ist das relative mittlere Schwankungsquadrat über der Länge L dargestellt (wieder, wie oben beschrieben, für 4 Reynoldszahlen interpoliert). Die Grenzwerte für L→0 sind als horizontale Geraden eingetragen, berechnet mit (22a) und (67). Sie stellen die mit Feldmessungen zu vergleichenden Grenzwerte dar. Offenbar konvergiert das Momentverfahren mit abnehmendem L langsamer gegen seinen Grenzwert als das Anpassungsverfahren (Bild 11); das Momentverfahren beruht auf Mittelwertbildungen, das Anpassungsverfahren dagegen auf der Methode der kleinsten Quadrate*).

Für den anderen Grenzfall, L→∞, ist das relative mittlere Schwankungsquadrat nach (22b) zu L^{-1} proportional. Deshalb sind die in Bild 13 gestrichelt eingezeichneten Geraden mit einer Steigung -1 asymptotisch**) angepaßt. Dadurch wird erkennbar, daß für große L-Werte die für den Diffusionsfall charakteristische Proportionalität zu L^{-1} besteht. Damit

---

*) vergl. Fußnote auf S. 45

**) Die näherungsweise Berechnung der Asymptote y=a/L geschieht durch Berechnung der Ausgleichsgeraden Y=A-X, mit Y=log y, A=log a und X=log L . Es wurden dazu nur solche Punkte aus Bild 13 herangezogen für die nach Augenschein das asymptotische Gesetz schon gilt. Das sind bei Re = 20000 die 6 größten Längen, bei Re = 10000 nur 5, dann nur 4 und bei Re = 2500 nur die 3 Meßwerte bei L = 300, 250 und 200 cm .

ist die wesentliche Aussage des Grenzgesetzes (22b) bestätigt und die zur asymptotischen Anpassung herangezogenen Meßwerte erlauben die Bestimmung der Diffusionskonstanten D ; aus (22b) folgt:

$$D = \frac{\overline{(\delta\tau_L)^2}}{\bar{\tau}_L^2} \quad \frac{L\,\bar{v}}{2} = \frac{\overline{(\delta\tau_L)^2}\;L^2}{2\,\bar{\tau}_L^3} \quad . \tag{70}$$

In der zweiten Gleichung ist $\bar{v}$ mit Hilfe von (A-20) eliminiert. Auch die in Bild 13 eingetragenen Meßpunkte tragen unterschiedliche statistische Gewichte. Deshalb werden zur Berechnung des Wertes D nach (70) alle Messungen herangezogen die in den Geltungsbereich der D-Verteilung fallen (wie oben $L \geq 100$ cm und $L\,Re^2 > 1{,}5\;10^{10}$ cm). Aus den so ausgewählten Messungen erhält man $\bar{D} = 43 \pm 7\ cm^2\ s^{-1}$.

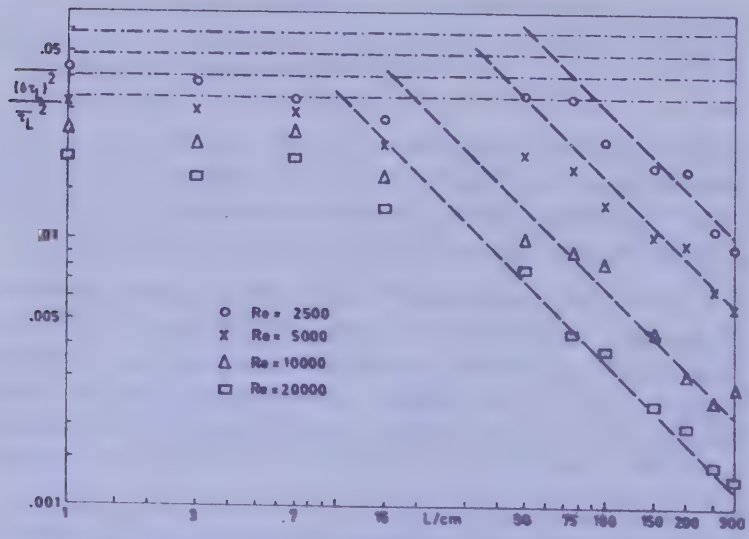


Bild 13 Relatives mittleres Schwankungsquadrat der Laufzeitverteilung. Die eingezeichneten Geraden sind im Text erläutert.

Die mit der Streuung zusammenhängenden Fragen werden später in Abschnitt 5.34 besprochen. Hier sei zunächst die Abhängigkeit der Diffusionskonstanten von der Variablen des Strömungszustandes diskutiert. Bis jetzt wurde nur die Abhängigkeit von der Reynoldszahl betrachtet. Bezüglich des Parameters ν enthalten die Untersuchungen von Blasius [14] und von Nunner [13], die zu der Beziehung (67) führen, die Aussage, daß die Widerstandszahl und damit auch der Exponent ν, nur von der Reynoldszahl abhängen. Für den Parameter D gab Bild 12 zu der Vermutung Anlaß, daß die Diffusionskonstante von der Reynoldszahl unabhängig ist, wenigstens in dem hier betrachteten Wertebereich. Die statistische Analyse der Meßwerte des Parameters D bezüglich der Variablen $\bar{v}$ und T, die in der Reynoldszahl auftreten, liefert keinen Widerspruch zu der Annahme der Unabhängigkeit von der Geschwindigkeit, sie gibt aber einen Hinweis auf eine Temperaturabhängigkeit. Bildet man die Korrelationskoeffizienten gemäß

$$R_{x,y} = \overline{(x-\bar{x})(y-\bar{y})} \; / \; [\, \overline{(x-\bar{x})^2}\;\overline{(y-\bar{y})^2}\,]^{1/2}$$

so erhält man aus den 25 im Geltungsbereich der D-Verteilung liegenden Meßwerten: $R_{D,\bar{v}} = -0{,}01$ und $R_{D,T} = -0{,}85$. Bezüglich der Geschwindigkeit ist daher kein Einwand gegen die Hypothese statistischer Unabhängigkeit zu erheben*). Die Unabhängigkeit von der Reynoldszahl in Bild 12 wird offenbar vorgetäuscht, weil die Meßwerte auf die Reynoldszahl bezogen sind. Dies war deshalb notwendig, weil die Temperatur bei den Messungen nicht konstant war. Sie wurde zwar nicht systematisch variiert, aber es traten infolge Erwärmung durch die Pumpe verschiedene Temperaturen auf, sodaß Meßwerte im Bereich zwischen 25°C und 40°C vorliegen. Geht man davon aus, daß die Temperatur nur über die kinematische Zähigkeit η/ρ in die Messungen eingeht, dann lassen die vorliegenden Messungen nach Bild 14 eine Proportionalität zwischen D und η/ρ vermuten. Mit dem Ansatz

$$D = a \, \frac{\eta}{\rho} \qquad (72)$$

*) Bei einem Signifikanzniveau von 1-a = 0,95 (95%) muß die Hypothese "es besteht keine statistische x-y Abhängigkeit" abgelehnt werden, wenn der Korrelationskoeffizient aus den (hier N=25) Werten dem Betrage nach größer ist als ein kritischer Wert, der von a und N abhängt (hier $R_{krit} = 0{,}41$). Bei der vorliegenden Streuung der Werte (10%) ist dies offenbar eine untere Grenze. Vergl. z.B. : Lothar Sachs "Statistische Methoden" Springer 1972 .

erhält man $a = 5630 \pm 535$. Als Korrelationskoeffizient von a bezüglich T erhält man $R_{a,T} = 0{,}41$, er ist wesentlich kleiner als der o.a. Koeffizient $R_{D,T}$. Der oben angegebene Wert $\bar{D} = 43\ cm^2 s^{-1}$ ist danach über den Temperaturbereich gemittelt. Mit (72) kann man die Meßwerte auf eine feste Temperatur beziehen und erhält so für $T = 25^oC$:

$$D = 50{,}5 \pm 4{,}8\ cm^2 s^{-1},\ (9{,}5\ \%)\ . \qquad (73)$$

Auch der weiter oben angegebene Wert $\bar{D} = 36\ cm^2 s^{-1}$, der mit Werten des Anpassungsverfahrens erhalten wurde, ist über den Temperaturbereich gemittelt. Man kann analog zu (72) auch diese Werte auf eine feste Temperatur beziehen und erhält in diesem Fall: $D = 42{,}1 \pm 4{,}5\ cm^2 s^{-1}$, (10,7 %). Aus Gründen, die in Abschnitt 5.34 erläutert werden, wird der nach dem Momentenverfahren ermittelte Wert (73) als zuverlässiger angesehen.

Es sei nochmals betont, daß die durch (16) oder (18) definierte und nach den beiden soeben beschriebenen Meßverfahren als Grenzwert ermittelte Größe D eine echte Diffusionskonstante der turbulenten Rohrströmung ist; in der aus (18) folgenden Relation $\overline{(x-\bar{x})^2} = 2\,D\,t$ ist D konstant in bezug auf x und t, also insbesondere unabhängig von der Länge der Strömungsstrecke. Dies schließt nicht aus, daß D von allen Physikalischen Größen abhängen kann die den Strömungszustand charakterisieren. Die vorliegenden Messungen zeigen jedoch, daß D nicht von der Strömungsgeschwindigkeit $\bar{v}$ abhängt.

Dies gilt nicht für den von Taylor durch die Definitionsgleichung $\overline{(x-\bar{x})^2} = 2\,D_t\,t$ eingeführten Wirbeldiffusionskoeffizienten D_t, wenn diese Definitionsgleichung nicht auf den Grenzfall $\{x,t\} \to \infty$ beschränkt wird. Wendet man, wie z.B. Zhernovoi diese Definition mit $x = \bar{v}\,\tau_L$ an, so erhält man bei kurzen Meßstrecken die Aussage "D_t wächst mit der Geschwindigkeit an". D_t hat dann interpolierenden Charakter wie die in Bild 12 verwendete Größe D^*, die nur (qualitativ) den Gültigkeitsbereich des Diffusionsansatzes abgrenzen kann. Die zwei von A.I. Zhernovoi[16] publizierten Meßwerte der Größe D_t können daher nicht mit der hier gemessenen Diffusionskonstanten D verglichen werden.

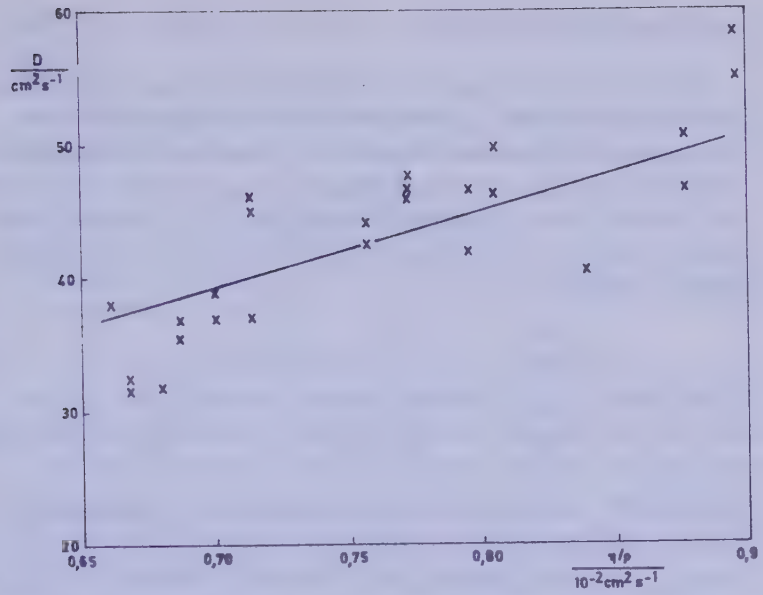


Bild 14 Diffusionskonstante, berechnet aus Meßwerten im Geltungsbereich der D-Verteilung. Eingezeichnet ist die Ausgleichsgerade $D = a\,\eta/\rho$ mit $a = 5630$.

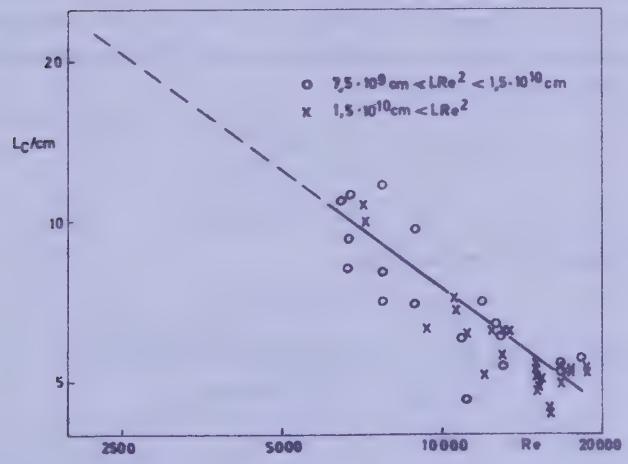


Bild 15 Korrelationslänge über der Reynoldszahl, aus Meßwerten im Geltungsbereich der D-Verteilung. Eingezeichnet ist die Gerade $L_c = L_{co}\,Re^{-3/4}$ mit $L_{co} = 7315$.

5.33 Die Korrelationslänge

Neben die Beschreibung der Teilchendispersion durch einen Diffusionsansatz (Abschnitt 3) wurde oben die Beschreibung durch einen Korrelationsansatz gestellt (Abschnitt 4). Dabei trat als charakteristische Größe die Korrelationslänge L_c auf, die durch (28) als Integral über die Korrelationsfunktion definiert ist. Als Ergebnis der Korrelationsbetrachtung folgt aus (29a) und(27b) mit (30a) für die beiden Grenzwerte

$$\left(\overline{(\delta\tau_L)^2} \;/\; \bar{\tau}_L^2 \right)_{L\to 0} = \frac{5}{4}\,\nu^2 \qquad (75a)$$

und

$$\left(\overline{(\delta\tau_L)^2} \;/\; \bar{\tau}_L^2 \right)_{L\to \infty} = \frac{5}{4}\,\nu^2\,\frac{2\,L_c}{L} \qquad (75b)$$

Der Faktor $2L_c$ könnte aus den Schnittpunkten der 4 Geradenpaare mit gleicher Reynoldszahl Bild 13 entnommen werden. Zweckmäßiger ist es jedoch L_c aus allen Meßwerten die in den oben definierten Geltungsbereich fallen zu berechnen. Man erhält dann aus (75b) mit (67) die in Bild 15 eingetragenen Werte. Diese Messungen legen einen Separationsansatz der Form $L_c = L_{co}Re^{-\alpha}$ nahe, worin L_{co} nicht von der Reynoldszahl Re abhängt. Aus Bild 15 lassen sich L_{co} und α bestimmen, allerdings mit relativ großer Streuung. Unabhängig von diesem Verfahren zur Bestimmung der Korrelationslänge (in Abhängigkeit von Re), das auf dem Ergebnis der Korrelationsbetrachtung (27b) beruht, kann man die Beziehung (30b) ausnutzen die zwischen der Korrelationslänge und der Diffusionskonstanten besteht. Aus (30b) mit (67) folgt

$$L_c = L_{co}\,Re^{-3/4} \qquad (76)$$

mit

$$L_{co} = 2{,}53\;2R\;\frac{D}{\eta/\rho} \qquad (76')$$

oder, wenn (72) benutzt wird

$$L_{co} = 2{,}53\;2R\;a\;. \qquad (76'')$$

Aus (76'') folgt mit 2R = 0,514 cm und a = 5630 ± 540

$$L_{co} = 7315 \pm 700\ \text{cm}\;. \qquad (77)$$

Mit diesem Zahlenwert und (76) ist die in Bild 15 eingezeichnete Gerade berechnet.

Die Separation der der Konstanten L_{co} kann noch durch eine statistische Korrelationsuntersuchung gestützt werden. Ergebnis:

$$R_{L_{co},Re} = 0{,}14 \ , \ R_{L_{co},\bar{v}} = 0{,}28 \quad \text{und} \quad R_{L_{co},T} = 0{,}29 \ .$$

Die Korrelationskoeffizienten von L_{co} sind also alle kleiner als der kritische Wert 0,41*).

Über die beiden Grenzfälle (27a) und (27b) hinausgehend ist in Abschnitt 4 mit (27) eine Beziehung angegeben die für alle L gilt. Allerdings ist von der Korrelationsfunktion R(L) nur das Integral (28), eben L_c und der Wert R(0) = 1 bekannt. Aus den Messungen des relativen Schwankungsquadrates (Bild 13) kann zwar das in (27) auftretende Integral F(L) entnommen werden, um daraus aber R(L) zu berechnen sind die vorliegenden Messungen zu ungenau. Sie sind zum Beispiel mit

$$R(L) = \frac{1}{1 + (\pi L \ / \ 2L_c)^2} \ ,$$

oder mit anderen Funktionen ähnlichen Typs verträglich.

---

*) vergl. Fußnote auf Seite 49

5.34 Die Meßgenauigkeit

Zur Diskussion der Genauigkeit des Meßverfahrens eignet sich der Laufzeitmittelwert. Dieser kann einerseits nach (68) aus den gemessenen Laufzeitverteilungen berechnet werden, andererseits aber auch aus der Länge und der mittleren Geschwindigkeit mit Hilfe der Gleichung $\bar{\tau}_L = L/\bar{v}$ (Anhang 2). Kombiniert man diese Beziehung mit (3) und $Q=I_o/n_o$ so entsteht eine Relation zwischen $\bar{\tau}_L$, L, dem Durchfluß Q*) und dem Rohrquerschnitt q,

$$q = \bar{\tau}_L \, Q \, / \, L \quad . \tag{78}$$

Als Testgröße für die Meßgenauigkeit ist q gut geeignet, denn 1. ist für jede Messung derselbe Wert zu erwarten, weil für alle Messungen derselbe PVC-Schlauch verwendet wurde**) und 2. stehen rechts in (78) unabhängig voneinander gemessene Größen, sodaß die nach (78) berechneten Werte mit statistisch verteilten Fehlern zu erwarten sind. Faßt man aber die Messungen nach dem Sprungverfahren und die Messungen nach dem Impulsverfahren getrennt zusammen, dann erhält man zwei verschiedene Mittelwerte, und zwar

$\bar{q}_1 = 0{,}2089 \pm 0{,}0009 \text{ cm}^2$ (Sprungverfahren mit 46 Werten)

$\bar{q}_2 = 0{,}2137 \pm 0{,}0008 \text{ cm}^2$ (Impulsverfahren mit 45 Werten),

wobei der Fehler des Mittelwertes, nicht die Streuung angegeben ist. Ursache für den großen Unterschied sind folgende Vernachlässigungen: 1. die Aufenthaltsdauer τ_o in der Einstrahlspule (siehe (A-27")), 2. die Aufenthaltsdauer τ_D in der Detektorspule (siehe Gleichung (54)), 3. die Impulsdauer τ_i beim Impulsverfahren (siehe (A-31")) und 4. die Zeitkonstante τ_e des elektronischen Teils der Meßapparatur, wie auf S. 30 im Zusammenhang mit Bild 4 diskutiert. Diese vier Verzögerungszeiten sind meßbar. Die Laufzeitmittelwerte werden dadurch korrigiert,

---

*) Q wurde mit einem Durchflußmesser vom Typ Rotameter gemessen. Nach Firmenangaben und nach eigenem Test [11,13] hatte dieses eine Meßgenauigkeit zwischen 1% und 3% .

**) Die Möglichkeit, daß der PVC-Schlauch infolge seiner Elastizität oder seiner Plastizität bei Druck- oder bei Temperaturänderungen seinen Querschnitt verändert, kann ausgeschlossen werden, da er genügend dickwandig war. Es wurde festgestellt, daß dq/dT kleiner als $4\ 10^{-4}$ cm^2/Grad und $dq/d\bar{v}$ kleiner als $3\ 10^{-5}$ cm s waren.

daß man $\bar{\tau}_L$ durch $\bar{\tau} = \bar{\tau}_L - \tau_o/2 - \tau_D/2 - \tau_i - \tau_e$ ersetzt.*) Damit erhält man die Mittelwerte

$$\bar{q}_1 = 0{,}2070 \pm 0{,}00093 \text{ cm}^2 \quad \text{(Sprungverfahren)}$$

$$\bar{q}_2 = 0{,}2083 \pm 0{,}00095 \text{ cm}^2 \quad \text{(Impulsverfahren)},$$

sie stimmen innerhalb der Meßgenauigkeit überein.
Damit ist der in Abschnitt 5.31 (Seite 36) angekündigte Vergleich durchgeführt. Als Querschnitt des PVC-Schlauches erhält man

$$\bar{q} = 0{,}2076 \pm 0{,}0007 \text{ cm}^2 \tag{79}$$

und daraus den Durchmesser

$$2R = 0{,}514 \text{ cm} .$$

Das Strömungsverfahren bestimmt den mittleren Durchmesser des durchströmten Schlauches. (Kalibermessung ergab 0,508 cm).

Die relative Streuung der Einzelmessung ist

$$\Delta q/\bar{q} = 0{,}029 . \tag{80}$$

Aus diesem Wert kann die Streuung der Laufzeitmessung berechnet werden. Setzt man die Streuung der Durchflußmessung mit $\Delta Q/Q = 0{,}02$ ein und vernachlässigt die Streuung der Längenmessung, so folgt aus (78) mit (80)

$$\Delta\tau_L/\bar{\tau}_L = 0{,}021 . \tag{81}$$

Die Streuung der Diffusionskonstanten in (73) ist das Fünffache dieses Wertes. Das folgt aus (70), denn der Fehler (81) geht dort dreifach ein und der Fehler des Schwankungsquadrates ist mit dem des Mittelwertes korreliert und etwa von doppelter Größe, wie aus (68) und (69) hervorgeht.

---

*) Bei allen vorn angegebenen Zahlenwerten wurde, sobald der Mittelwert (68) enthalten ist, die hier beschriebene Korrektur verwendet. Die entsprechende Korrektur für das 2. Moment (69) ist:

$$\overline{(\delta\tau)^2} = \overline{(\delta\tau_L)^2} - \tau_e^2 .$$

Es gibt zwei Erklärungen für den Unterschied der Werte $D = 50{,}5 cm^2 s^{-1}$ in (73) und $D = 42{,}1\ cm^2 s^{-1}$, wovon der erste aus den Meßkurven berechnet ist (Momentenverfahren), und der andere mit dem Anpassungsverfahren erhalten wurde. Der reine Diffusionsfall $D(L \to \infty)$ wird mit wachsendem L asymptotisch erreicht; aber die als im Gültigkeitsbereich liegend ausgewählten Meßwerte beziehen sich auf endliche L-Werte. Der mit dem Anpassungsverfahren gewonnene Wert ist dann kleiner als der Grenzwert D, vergl. Bild 12. Dies gibt Veranlassung dem größeren Wert mehr zu vertrauen. Als zweite Erklärung sei auf einen systematischen Fehler hingewiesen der bei Anpassung auftreten kann. Die gewählte Anpassungsbedingung (64) setzt konstante Fehler voraus, die bei den Messungen vorlagen, denn die wesentlichen Störquellen (elektronisches Rauschen und Pumpenschwankungen) sind von der Variablen τ_L unabhängig. Mit der Forderung nach minimaler Quadratsumme (64) werden zwei Funktionen über τ_L bis auf vergleichbare Absolutfehler einander angepaßt; bei großen Funktionswerten im zentralen Bereich der Verteilung ist dann der relative Anpassungsfehler klein und bei den kleinen Funktionswerten an den Flanken der Verteilung größer. Sieht man daraufhin die Bildreihen 5 und 6 an, so erkennt man, daß dieser geschilderte Fall besonders an den rechten Flanken auftritt und zwar so, daß das Schwankungsquadrat der D-Verteilung kleiner ist als das der Meßkurve. Dasselbe gilt dann (z.B. wegen (21) oder (22b)) auch für die daraus erhaltenen Grenzwerte D. Auch aus diesem Grunde verdient der größere Wert mehr Vertrauen.

6. Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Laufzeitverteilung von Teilchen in einer Rohrströmung und deren Messung mittels der Kernresonanzmethode. Die Laufzeitverteilung $f_L(\tau)$ wird als Wahrscheinlichkeitsdichte über einer Menge strömender Flüssigkeitsteilchen erklärt. Sie ist dadurch meßbar, daß am Anfangsquerschnitt der Strecke $L = x_2 - x_1$ eine Testmenge N_1 zur Zeit t_1 gebildet wird, was z.B. durch Impulseinstrahlung geschieht, sodaß alle Teilchen der Testmenge gleiche Anfangszeit $t_{1k} = t_1$ besitzen. Die Kernresonanzmessung erfolgt an der Stelle x_2 wo die Teilchen der Menge N_1 individuelle Endzeiten $t_{2k} = t_1 + \tau_k$ haben. Die Teilmenge $dN_1(\tau) = N_1 f_L(\tau) d\tau$ passiert den Querschnitt bei x_2 im Zeitintervall $d\tau$ zur Zeit $t_1 + \tau$.

Die Berechnung der Laufzeitverteilung in turbulenter Rohrströmung gelingt für zwei Grenzfälle. Ist die Strecke L sehr kurz, Grenzfall $L \to 0$, dann kann die Laufzeitverteilung aus der Geschwindigkeitsverteilung der Rohrströmung berechnet werden, denn benachbarte Teilchen haben auch bei turbulenter Strömung vergleichbare Geschwindigkeit und es wird angenommen, daß sie diese auch für eine kurze Strecke beibehalten (Korrelationsannahme). Ist die Strecke sehr lang, Grenzfall $L \to \infty$, dann kann das Strömungsfeld nicht zur Berechnung herangezogen werden. In diesem Fall gelingt die Berechnung der Laufzeitverteilung mit einem Diffusionsansatz. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Teilchenbahnen wie bei freier Turbulenz auch in der begrenzten Rohrströmung statistisch unbestimmt verlaufen (Diffusionsannahme). Eine Berechnung der Laufzeitverteilung für den Zwischenbereich wird nicht durchgeführt*); zur Beschreibung der Meßergebnisse reicht die Mischung der zwei genannten Grenzfallverteilungen aus - vergl. (66) - und eine Aussage über den Verlauf des zweiten Momentes der Laufzeitverteilung im Zwischenbereich folgt aus einer Korrelationsbetrachtung.

Als Ergebnis der Korrelationsbetrachtung läßt sich ein Zusammenhang zwischen dem relativen mittleren Schwankungsquadrat der Laufzeitverteilung, dem Korrelationskoeffizienten R(L) und der Streckenlänge gewinnen, der für die zwei Grenzfälle $L \to 0$ und $L \to \infty$ ausgewertet werden kann, weil die Werte $R(0) = 1$ und $R(\infty) = 0$ bekannt sind. Die Funktion R(L) wird als Korrela-

---

* Eine solche Berechnung ist mathematisch zwar aufwändig, wäre aber prinzipiell möglich, z.B. mit einem verallgemeinerten Diffusionsansatz, vergl. dazu I. I. Gichmann und A. W. Skorochod [17].

tionskoeffizient individueller Teilchenlaufzeiten erklärt. Das Integral $L_c = \int_0^\infty R(L)\, dL$ definiert die Korrelationslänge.

Betrachtet man das aus der Laufzeitverteilung berechnete relative mittlere Schwankungsquadrat nach (22a), (22b) und zum Vergleich das mit der Korrelationsbetrachtung erhaltene nach (27a), (27b), so sind beide für kleine L ($L \ll L_c$) unabhängig von L und für große L ($L \gg L_c$) proportional zu 1/L. Weiter liefert dieser Vergleich eine Beziehung zwischen den Parametern D und L_c, die beide den dispersiven Aspekt der Rohrströmung beschreiben,

$$D = \frac{5}{4}\, \nu^2\, \bar{v}\, L_c$$

(Voraussetzung: $L\, \bar{v} \gg 4\, D$; ν = Exponent der K-Verteilung)
Diese Beziehung folgt aus (30). Der Faktor zwischen D und L_c enthält nur die mittlere Geschwindigkeit und nach (67) die Reynoldszahl. Es kann also dieser Faktor allein aus Messungen des Strömungsfeldes bestimmt werden.

Für die Messung der Laufzeitverteilung mit der Kernresonanzmethode werden fünf Meßverfahren angegeben. Alle basieren darauf, daß die Laufzeitverteilung die Gewichtsfunktion (Greensche Funktion) für die Übertragung der Information "Teilchenmarkierung" ist. Das Impulsverfahren liefert die Verteilung selbst, andere Verfahren liefern deren Integral oder die Fouriertransformierte.

Die Dimensionierung der Strömungsapparatur wird nach Festlegung der Eigenschaften des Kernresonanz-Strömungsdetektors und der Nachweiselektronik so vorgenommen, daß die Messungen mit Wasser bei Reynoldszahlen zwischen 2000 und 20 000 optimales Signal liefern. Der Rohrdurchmesser war bei allen Messungen 0,5 cm. Die Länge der Meßstrecke wurde zwischen 1 cm und 300 cm variiert. Die Wassertemperatur lag zwischen 25°C und 40°C.

Die Meßergebnisse rechtfertigen die Annahme die den Berechnungen der Laufzeitverteilungen zugrunde gelegt wurden. Dazu wurden 140 digital erfaßte Meßkurven ausgewertet. Die mittlere Abweichung (Anpassungsfehler) der gerechneten Mischverteilungen von den Meßkurven liegt zwischen 2 % und 3 %. Dadurch wird der stetige Übergang vom Typ der Korrelationsverteilung ($L \to 0$) zum Typ der Diffusionsverteilung ($L \to \infty$) bestätigt. Zur Anpassung wurden die Parameter nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Die Parameter der Korrelationsverteilung können aus den gemessenen Laufzeitverteilungen und unabhängig davon auch aus Messungen des Strömungsfeldes bestimmt werden.

Die so erhaltenen Zahlenwerte stimmen innerhalb der Meßgenauigkeit überein. Die Diffusionskonstante wird als Parameter der Diffusionsverteilung aus den Meßkurven extrapoliert. Es ist bei $T = 25^{\circ}C$

$$D = 50 \pm 5 \ cm^2 s^{-1} \ .$$

Die Messungen im Geltungsbereich der D-Verteilung zeigen, daß D nicht von der Geschwindigkeit abhängt. Sie lassen weiter den Schluß zu, daß D von der Temperatur abhängt und zwar so, wie die kinematische Zähigkeit η/ρ . Die Proportionalitätskonstante in dem Ansatz

$$D = a \, \eta/\rho$$

hat den Wert

$$a = 5630 \pm 535 \ .$$

Wird diese Proportionalität in die Beziehung zwischen D und L_c eingesetzt, dann folgt

$$L_c = L_{co} \, Re^{-3/4}$$

mit

$$L_{co} = 2{,}53 \ a \ 2R \ .$$

Der dimensionslose Faktor a in der Beziehung $D = a \, \eta/\rho$ könnte noch vom Rohrradius R abhängen, der nicht variiert wurde. Eine Dimensionsbetrachtung legt aber die Vermutung nahe, daß a unabhängig von R ist, weil für das hier betrachtete Strömungsproblem neben R keine weitere charakteristische Bezugslänge existiert. Trifft diese Vermutung zu, dann ist die Korrelationslänge proportional zu $R^{1/4}$.

Die entwickelten Meßverfahren und die Diskussion der Apparatur unter besonderer Berücksichtigung der Strömungseinflüsse sind auch für die NMR-Spektroskopie mit der Strömungsmethode von Bedeutung, da als weiteres Ergebnis der vorliegenden Arbeit (Umkehrung der Aufgabenstellung) der Zusammenhang zwischen Einstrahlung im Zwischenfeld und Detektorsignal quantitativ geklärt wurde.

Die vorliegende Arbeit wurde am Institut für Atom- und Festkörperphysik der Freien Universität Berlin durchgeführt. Ich danke Herrn Prof. Dr. S. Wilking, der den Anstoß zur Bearbeitung dieses Themas gab, für sein weiteres förderndes Interesse und für wertvolle Diskussionen. Bei der Durchführung der Experimente wurden Geräte verwendet, die von der Deutschen Forschungsgemeinschaft zur Verfügung gestellt waren. Die numerische Auswertung der Meßdaten erfolgte am Rechenzentrum der Universität, wo auch die "Digigraphic"-Bilder 5, 6 und 10 entstanden.

Anhang 1

Der Erwartungswert des Kerndipoloperators

Bei der ersten Beschreibung kernmagnetischer Resonanzeffekte in schwachen Magnetfeldern benutzt Wilking[1] zur Deduktion des Sachverhaltes den Kalkül der Besetzungszahlendifferenz eines Spinsystems identischer, schwach gekoppelter Kerne der Drehimpulsquantenzahl I=1/2. Die Strömungsteilchen werden gleich schnell angesehen. Die Laufzeitverteilung wird im Anhang der Arbeit[1] genannt, aber nicht näher untersucht. In der vorliegenden Arbeit wird vom Einteilchen Erwartungswert des magnetischen Kerndipoloperators ausgegangen. Der Erwartungswert wird einem strömenden Teilchen, Molekül, individuell zugeordnet. Zwar wird zur deduktiven Beschreibung der Vorgänge im Strömungsspektrometer der Erwartungswert zu allen Zeiten betrachtet, vergl.Bild 1b, von Bedeutung ist aber wegen (48) allein die Bildung des Erwartungswertes zur Beobachtungszeit im Detektor (Messung).

Zur Berechnung des Erwartungswertes geht man vom Hamiltonoperator für ein Kernspinsystem in einem Magnetfeld B aus,

$$H = -\vec{\mu}\,\vec{B} + V = -\hbar\,\gamma\,\vec{I}\,\vec{B} + V \quad . \qquad \text{(A-1)}$$

Darin ist $\vec{\mu}$ der Operator des magnetischen Kerndipolmomentes, γ das gyromagnetische Verhältnis und $\hbar\vec{I}$ der Kerndrehimpulsoperator. Das Magnetfeld $\vec{B}$ ist in einem mit dem Teilchen mitbewegten Bezugssystem zu beschreiben. Eine Transformation des elektromagnetischen Feldes in das bewegte System liefert keinen veränderten Beitrag, da die Strömungsgeschwindigkeit dafür zu klein ist. Das B-Feld wird deshalb quasistationär beschrieben. V beschreibt die inneren Energieanteile, die Wechselwirkung mit benachbarten Dipolen, speziell die Relaxationswechselwirkung.

Der Dichteoperator genügt der Bewegungsgleichung

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\,[H,\rho] \quad .$$

Er erlaubt den Erwartungswert in der einfachen Form

$$\langle\vec{\mu}\rangle = Sp\ \{\rho, H\} \qquad \text{(A-2)}$$

zu schreiben. Die Bewegungsgleichung des Erwartungswertes ergibt sich dann zu *)

$$\frac{d\langle\vec{\mu}\rangle_t}{dt} = \gamma\langle\vec{\mu}\times\vec{B}\rangle - \frac{i}{\hbar}\langle\vec{\mu},V\rangle \quad . \tag{A-3}$$

In niederviskosen Flüssigkeiten läßt sich (A-3) in die halbklassische Bloch-Gleichung überführen [18]:

$$\frac{d\langle\vec{\mu}\rangle_t}{dt} = \gamma\langle\vec{\mu}\rangle_t\times\vec{B}(t) - \frac{\langle\mu_x\rangle_t\vec{i}+\langle\mu_y\rangle_t\vec{j}}{T_2} - \frac{\langle\mu_z\rangle_t-\langle\mu_z\rangle_\infty}{T_1}\vec{k} \quad . \tag{A-4}$$

Darin ist $\langle\mu_z\rangle_\infty$ der thermodynamische Gleichgewichtswert, der für $t\to\infty$ bei $\vec{B}(t)=B_z\vec{k}$=konst. auftritt. Er ist nach (A-2) mit dem kanonischen Dichteoperator zu bilden. Zu der Kernmagnetisierung M_∞ im thermodynamischen Gleichgewicht besteht der Zusammenhang

$$M_\infty = n_o\langle\mu_z\rangle_\infty = \frac{\chi_o}{\mu_o}B_z \quad , \tag{A-5}$$

worin χ_o die kernmagnetische Suszeptibilität und μ_o die Maßsystemkonstante ist. Die Relaxationszeiten T_1 und T_2 sind in niederviskosen Flüssigkeiten einander gleich und vom Feld B unabhängig, solange die Präzessionsfrequenz γB_z klein gegen die mittlere Stoßfrequenz der thermischen Molekülbewegung ist. Für die Abhängigkeit der Relaxationszeit T_1 von Temperatur T und Viskosität η gilt für das Spinsystem Protonen in Wasser in der Nähe der Zimmertemperatur [20), 10)]

$$T_1 \sim T/\eta \quad , \quad T_1(25^oC) = 2{,}75 \text{ s}. \tag{A-6}$$

Der Zahlenwert gilt für Protonen in Wasser, das wie in der Strömungsapparatur nicht von gelöstem Sauerstoff befreit ist.

---

*) Der hier sehr knapp dargestellte Zusammenhang ist z.B. bei [illegible] ausführlicher zu finden.

(A-4) ist eine lineare Differentialgleichung, deren Lösung durch stückweise Integration berechnet werden kann. Wir machen dazu folgende Fallunterscheidung.

Fall a: $\vec{B}(t) = B_z(t)\,\vec{e}_z$.

Dieser Fall gilt für strömende Teilchen die sich außerhalb der Einstrahlspule bzw. außerhalb der Detektorspule befinden. Das Feld ist im Laborsystem zeitkonstant. Obige Zeitabhängigkeit resultiert nur aus der Strömungsbewegung.

Fall b: $\vec{B}(t) = B_\sim \cos \omega t\,\vec{e}_x + B_{z,o}\,\vec{e}_z$.

Das Feld sei homogen, die Strömungsbewegung liefert daher keine Zeitabhängigkeit im mitbewegten Bezugssystem. Die Zeitabhängigkeit resultiert nur aus der Wechselfeldeinstrahlung mit der Frequenz ω . Die Einstrahlspule sei konzentrisch um das Strömungsrohr gewickelt. Daher besteht auch keine Frequenzverschiebung im mitbewegten System bezüglich des Laborsystems [2].

Fall c: $\vec{B}(t) = B_\sim \cos \omega t\,\vec{e}_x + (B_{z,D} + B_m \cos \omega_m t)\vec{e}_z$.

Dieser Fall betrifft das Feld im Detektor. Es wird näherungsweise homogen vorausgesetzt und es sei mit der Frequenz ω_m moduliert, $B_m \ll B_{z,D}$.

Es soll schließlich noch vorausgesetzt werden, daß die drei Fälle an ortsfesten Grenzbereichen aneinander anschließen, wobei die Grenzbereiche klein gegen die anderen Bereiche sein sollen. Damit werden die Laufzeiten als Strömungszeiten in diesen Bereichen meßbar.

Mit dem Anfangswert

$$\langle\vec{\mu}\rangle_{t_o} = (\langle\mu_x\rangle_{t_o}, \langle\mu_y\rangle_{t_o}, \langle\mu_z\rangle_{t_o}) \qquad \text{(A-8)}$$

erhält man aus (A-4) für ein Feld im Fall a die Lösung

$$\begin{aligned}
\langle\mu_x\rangle_t &= e^{-\tau/T_2}\,(\langle\mu_x\rangle_{t_o}\cos\varphi + \langle\mu_y\rangle_{t_o}\sin\varphi) \\
\langle\mu_y\rangle_t &= e^{-\tau/T_2}\,(\langle\mu_x\rangle_{t_o}\sin(-\varphi) + \langle\mu_y\rangle_{t_o}\cos\varphi) \qquad \text{(A-9)} \\
\langle\mu_z\rangle_t &= e^{-\tau/T_1}\,\langle\mu_z\rangle_{t_o} + \langle\mu_z\rangle^{(R)} \qquad .
\end{aligned}$$

$\tau = t - t_o$

(A-9) beschreibt die freie Präzession und das Relaxieren strömender Kerndipole. Es ist darin

$$\varphi(t) = \varphi(t_o) + \int_{t_o}^{t} \gamma B_z(t')\, dt' \qquad \text{(A-9')}$$

die Präzessionsphase und

$$\langle \mu_z \rangle^{(R)} = \frac{\chi_o\, e^{-\tau/T_1}}{\mu_o\, n_o\, T_1} \int_{o}^{\tau} B_z(t')\, e^{t'/T_1}\, dt' \,, \qquad \tau = t - t_o \,, \qquad \text{(A-10)}$$

der Relaxationsanteil. Ist B_z homogen, also im mitbewegten Bezugssystem zeitkonstant, dann ist (A-10) integrierbar und es folgt für die z-Komponente mit (A-5)

$$\langle \mu_z \rangle_t = \langle \mu_z \rangle_{t_o}\, e^{-\tau/T_1} + \langle \mu_z \rangle_\infty \,(1 - e^{-\tau/T_1}) \,, \qquad \tau = t - t_o \,. \qquad \text{(A-11)}$$

Diese Beziehung wird in Abschnitt 5.23 bei der Diskussion der Apparatur benutzt. Aus (A-10) folgt Gleichung (3') .

Zur Lösung von (A-4) mit Fall b wird eine Transformation in ein um die z-Achse rotierendes Bezugssystem (u,v,z) angesetzt. Das Wechselfeld $B_\sim \cos \omega t\, \vec{e}_x$ wird in zwei zirkulare Komponenten halber Amplitude zerlegt, die entgegengesetzt drehen und von denen eine dann im (u,v,z)-System ruht, wenn dieses mit der Frequenz ω rotiert. Die andere Komponente trägt zum Resonanzeffekt nicht bei; sie liefert eine Verschiebung der Eigenwerte des Spinsystems. Die Verschiebung hat nach Bloch und Siegert [21] die Größe

$$\frac{\Delta E(B_\sim) - \Delta E(0)}{\Delta E(0)} = \frac{B_\sim^2}{16\, B_{z,o}^2} \qquad \text{(A-12)}$$

und soll hier vernachlässigt werden. Die Transformation in das rotierende System wird zweckmäßig komplex geschrieben als

$$\langle \mu_u \rangle + i \langle \mu_v \rangle = (\langle \mu_x \rangle + i \langle \mu_y \rangle)\, e^{-i\omega t} \,. \qquad \text{(A-13)}$$

Wird im Fall b noch $T_2=T_1$ und $\langle\mu_z\rangle_\infty=0$ gesetzt, dann erhält man als Lösung der jetzt homogenen Gleichung (A-4) mit der resonanten Wechselfeldkomponente

$$\langle\vec{\mu}\rangle_t = \langle\vec{\mu}\rangle_{t_o} \; e^{-\tau/T_1} \; W_{ik}(\tau) \quad , \qquad (A\text{-}14)$$

$$(\tau = t-t_o) \; , \; (i,k = u,v,z) \; .$$

mit der Matrix

$$W_{ik} = \begin{pmatrix} (1-\frac{(\Delta\omega_o)^2}{\alpha^2}(1-\cos\alpha\tau)) & \frac{\omega_o}{\alpha^2}\sin(-\alpha\tau) & \frac{\omega_1\Delta\omega_o}{\alpha^2}(1-\cos\alpha\tau) \\ \frac{\Delta\omega_o}{\alpha}\sin\alpha\tau & \cos\alpha\tau & \frac{\omega_1}{\alpha}\sin\alpha\tau \\ \frac{\omega_1\Delta\omega_o}{\alpha^2}(1-\cos\alpha\tau)) & \frac{\omega_1}{\alpha}\sin\alpha\tau & (1-\frac{\omega_1^2}{\alpha^2}(1-\cos\alpha\tau)) \end{pmatrix}$$

und mit den Abkürzungen $\tau=t-t_o$, $\omega_1 = \gamma B_1 = \frac{\gamma B_\sim}{2}$,

$$\Delta\omega_o = \omega-\gamma B_{z,o} \; , \quad \text{und} \quad \alpha^2 = (\Delta\omega_o)^2 + \omega_1^2 \; .$$

In der Strömungsapparatur gilt für ein strömendes Teilchen außerhalb der Einstrahlspule, also im Polarisator und auf der Strömungsstrecke, (A-9). Nur in der Einstrahlspule gilt (A-14). Wegen (A-9') kann nur in sehr homogenem Feld eine Phasenkohärenz verschiedener Teilchen bestehen, und auch nur zwischen Teilchen gleicher Anfangsphase. Im allgemeinen ist die Phase freier Präzession gleichverteilt. Dies ist gleichbedeutend mit der Anfangsbedingung

$$\langle\vec{\mu}\rangle_{t_o} = (\,0\,,\,0\,,\,\langle\mu_z\rangle_{t_o}\,) \; . \qquad (A\text{-}15)$$

Die Lösungen (A-9) und (A-14) werden also unter Beachtung von (A-15) aneinandergesetzt. Mit der Indizierung der Laufzeit nach Bild 1a folgt daraus Gleichung (3).

Fall c sei mit folgenden Annahmen diskutiert. Die Detektorspule ist kurz, $\vec{B}(t)$ wird daher in diesem Bereich als homogen angesehen. Für die Mehrzahl der strömenden Kerndipole ist die Aufenthaltsdauer

im Detektor kurz, $\vartheta = t-t_o \ll T_1, T_2$. Deshalb werden die Relaxationsterme in (A-4) vernachlässigt. Aus (A-4) folgt dann

$$\frac{d\langle\vec{\mu}\rangle_t}{dt} = \gamma \langle\vec{\mu}\rangle_t \times \vec{B}(t) \quad . \tag{A-16}$$

Diese Gleichung ist mit $\vec{B}(t)$ nach Fall c und mit dem Anfangswert (A-15) zu lösen. Dazu wendet man, wie bei Fall b, die Drehtransformation (A-13) in das rotierende (u,v,z)-Bezugssystem an und macht zusätzlich den Spektralansatz [22]

$$\langle\mu_v\rangle_t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n e^{in\omega_m t} \quad . \tag{A-17}$$

Nach längerer Rechnung, die ähnlich jenen Rechnungen abläuft, die von Halbach [23], Primas [24] und Schulenburg [25] beschrieben wurden, erhält man die Lösung in einer Spektraldarstellung.

$$\langle\mu_x\rangle_t + i\langle\mu_y\rangle_t = \langle\mu_z\rangle_{t_o} \sum_{n,r=-\infty}^{+\infty} J_r(x)(u_n+iv_n) e^{i(\omega+(n-r)\omega_m)t} \quad . \tag{A-18}$$

Darin sind

$$u_n = \frac{\Delta\omega_n \omega_{1n}}{\alpha_n^2} (1-\cos\alpha_n\vartheta) \ ,$$

$$v_n = \frac{\omega_{1n}}{\alpha_n} \sin\alpha_n\vartheta \ ,$$

mit

$$\Delta\omega_n = (\omega-\gamma B_{z,D}-n\omega_m) \ , \ \omega_{1n} = \frac{\gamma B_\sim}{2} J_n(x) \ , \ x = \frac{\gamma B_m}{\omega_m} \ ,$$

$\alpha_n^2 = (\Delta\omega_n)^2 + \omega_{1n}^2$, $\vartheta = t-t_o$, und $J_n(x)$ sind die Besselfunktionen der n-ten Ordnung 1. Gattung. Der Realteil von (A-18) läßt sich, mit $\omega=\omega_D$, auf die Form von Gleichung (49) bringen. Die Demodulation im Detektor liefert am Ausgang ein Signal, welches die Modulationsfrequenz ω_m und Vielfache davon enthält. Daher ist phasenempfindliche Gleichrichtung (lock-in) notwendig, um die Signalspannung zu erhalten. Die Summation über die strömenden Teilchen ist vorn diskutiert. Die Signalamplitude hängt aber außer von der Dauer ϑ noch von Detektorparametern ab. Nach (A-18) sind von Bedeutung: $\omega-\gamma B_D$, $B_\sim$, B_m und ω_m . Diese Parameter müssen bei Messungen konstant gehalten werden und vorher optimal eingestellt sein. Zur Optimierung dient (A-18) .

Anhang 2

Laufzeitmittelwert $\bar{\tau}$ und mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$

Ergänzend sei noch eine Bemerkung zur Frage der Laufzeitverteilung angefügt. Bei den berechneten Laufzeitverteilungen (11) und (13) liefert die Bildung des Mittelwertes $\bar{\tau}_L = L/\bar{v}$, einen Zusammenhang mit dem Feldmittelwert $\bar{v}$. Bei der Verteilung (19) ist dieser Zusammenhang wegen (20) nicht erkennbar. Ein Zusammenhang läßt sich aufgrund der Laufzeitdefinition herstellen. Nach (8) ist die Verteilung bezüglich einer Strecke $L=x_2-x_1$ bei konstantem Querschnitt q erklärt. Dazu gehört das Volumen $V_L = L\ q$. Und mit (2') ergibt sich die Teilchenzahl in diesem Volumen zu

$$N_L = n_o\ V_L = I_o\ \frac{L}{\bar{v}} \quad . \tag{A-19}$$

Diese Größen können unabhängig von der Laufzeitverteilung gemessen werden. Nach Gleichung (52) kann man aber N_L auch aus der Laufzeitverteilung berechnen.

$$\frac{N_L}{I_o} = \frac{L}{\bar{v}} = \int_o^\infty d\vartheta \int_\vartheta^\infty f_L(\tau)\ d\tau \quad .$$

Das Integral läßt sich partiell lösen. Es sei zur Abkürzung

$$A(\vartheta) = \int_\vartheta^\infty f(\tau)\ d\tau \ , \quad \frac{dA}{d\vartheta} = -\ f_L(\vartheta)$$

gesetzt. Dann folgt

$$\frac{L}{\bar{v}} = \left[\ \vartheta\ A(\vartheta)\ \right]_o^\infty + \int_o^\infty \tau f_L(\tau)\ d\tau$$

$$= \lim_{\vartheta\to\infty} \left(\frac{A(\vartheta)}{1/\vartheta}\right) + \bar{\tau}_L$$

$$= \bar{\tau}_L + \lim_{\vartheta\to\infty} \left(\ \vartheta^2\ f_L(\vartheta)\right) \ .$$

Es gilt also für alle Laufzeitverteilungen, für die der Grenzwert verschwindet

$$L/\bar{v} = \bar{\tau}_L \tag{A-20}$$

Für alle vorn angeführten Verteilungen verschwindet der Grenzwert.

Für die Mittelwerte $\bar{\tau}_L$ (14), der Verteilungen $f_{L,L}(\tau_L)$ bzw. $f_{L,T}(\tau_L)$ gilt (A-20) wegen der Voraussetzung (10). Für den Mittelwert (20) der Verteilung $f_{L,D}(\tau_L)$ ist das Ergebnis (A-20) von Bedeutung, weil damit der Zusammenhang zwischen u_o und $\bar{v}$ hergestellt werden kann. Mit (A-20) folgt aus (20)

$$u_o = \bar{v} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + (4D/L\bar{v})} \right] . \qquad \text{(A-21)}$$

Dieser Ausdruck geht für Strecken der Länge $L \gg 4D/\bar{v}$ gegen den Näherungsausdruck:

$$u_o = \bar{v} . \qquad \text{(A-23)}$$

A n h a n g 3

Berechnung der Signalkurven

Als Ergebnis der Diskussion des Detektors (Abschnitt 5.21) wurde festgestellt, daß die Signalspannung (56) zum mittleren Dipolerwartungswert proportional ist. Daher ist die Meßkurve U(t) proportional zur zeitlichen Änderung des mittleren Dipolerwartungswertes $\Delta m_D(t)$. Zur Berechnung der Signalkurven $\Delta m_D(t)$ der einzelnen Meßverfahren wird wie im Anhang 1 von (A-4) ausgegangen, wobei (31),(32) oder (33) zu beachten sind.

Zum Meßverfahren 1, Sprungverfahren, liefert die Berechnung des Erwartungswertes mit zeitabhängiger Einstrahlamplitude nach (31) und bei Resonanzeinstrahlung wie in (6)

$$\langle \mu_z \rangle_D = \langle \mu_z \rangle_o \cos \omega_1 \tau_w \; e^{-\frac{\tau_o}{T_1}} \; e^{-\frac{(t-t_{o'})}{T_1}} + m_D^{(R)} \; . \qquad \text{(A-25)}$$

es ist also

$$T_{o' \to D} = e^{-(t-t_{o'}) / T_1}$$

und

$$T_{o \to o'} = \cos \omega_1 \tau_w \; e^{-\tau_o / T_1} \; ,$$

worin τ_o die Laufzeit in der Einstrahlspule und τ_w die Wechselwirkungsdauer in der Einstrahlspule sind. Für (4) und (6) war $\tau_w = \tau_o$ vorausgesetzt. Weil die Zeitfunktion (31) und auch (32) aus Schaltfunktionen aufgebaut sind, hat (38) keine andere Lösungsstruktur als (6) aber bei der Mittelwertbildung ist nicht die Laufzeit allein, sondern die Wechselwirkungsdauer τ_w zu berücksichtigen. Erfahren Teilchen das Schalten (31) in der Einstrahlspule, dann ist für diese $\tau_w < \tau_o$. Strömen Teilchen erst nach dem Einschalten in die Einstrahlspule ein, dann ist für sie $\tau_w = \tau_o$. Von der ausströmenden Menge $N_{o'}(t)$, die zur Zeit t aus der Einstrahlspule ausströmt, sei $dN_{o'}(\tau_o < t)$ die Teilmenge, deren Teilchenlaufzeit $\tau_o < t$ ist. Das Schalten zur Zeit t=0 lag also vor dem Einströmen dieser Teilmenge. Dann hat die Komplementmenge $\{1-dN_{o'}(\tau_o < t)\}$ den Schaltvorgang in der Einstrahlspule erfahren. Die Teilmenge $dN_{o'}$ ist gegeben durch

$$\frac{dN_{o'}(\tau_o < t)}{N_{o'}(t)} = \int_o^t f_o(\tau_o) \, d\tau \; . \qquad \text{(A-26)}$$

Mit (39), (31) und (38) folgt aus (37')

$$m_{o'}(t_{o'}) = \langle \mu_z \rangle_o \cos \omega_1 t_{o'} \int_o^\infty e^{-\frac{\tau_o}{\bar{T}_1}} f_o(\tau_o)\, d\tau_o \left(1 - \int_o^{t_{o'}} f_o(\tau_o)\, d\tau_o\right)$$

$$+ \langle \mu_z \rangle_o \int_o^\infty \cos \omega_1 \tau_o \; e^{-\frac{\tau_o}{\bar{T}_1}} f_o(\tau_o)\, d\tau_o \int_o^{t_{o'}} f_o(\tau_o)\, d\tau_o \,, \qquad \text{(A-27)}$$

wenn darin $\omega_1 = \begin{cases} 0 & \text{für } t_{o'} < 0 \\ \omega_{10} = \pi / \bar{\tau}_o & \text{für } t_{o'} \geq 0 \end{cases}$ und wenn für die Integration $\int_o^{t_{o'}} \ldots d\tau_o = 0$ falls $t_{o'} < 0$ gilt.

Der erste Term in (A-27) beschreibt für $t_{o'} < 0$, also vor dem Einschalten der Einstrahlung, den stationären Anfangswert und für $t_{o'} > 0$ das Ausströmen derjenigen Teilchen, die zur Einschaltzeit in der Einstrahlspule waren. Für $t_{o'} \gg \bar{\tau}_o$ geht (A-27) in den wieder stationären Endwert über, der durch den zweiten Term allein beschrieben wird. (A-27) ist die Übergangsfunktion des 1. Subsystems "Einstrahlspule und Strecke L_o" und ist Eingangsfunktion für das 2. Subsystem, der Strecke L_s, dessen Laufzeitverteilung mit diesem 1. Meßverfahren gemessen werden soll.

Um die weitere Diskussion dieses 1. Meßverfahrens übersichtlich zu halten sei eine Näherung durchgeführt. Die Verteilungsbreite von f_o, als die die Wurzel aus dem mittleren Schwankungsquadrat angesehen werden kann, ist klein gegen den Mittelwert. Das gilt sowohl für f_o als auch für f_s. Es besteht die Ungleichung

$$\sqrt{\overline{(\delta\tau_o)^2}} \ll \bar{\tau}_o \ll \sqrt{\overline{(\delta\tau_s)^2}} \ll \bar{\tau}_s \quad . \qquad \text{(A-28)}$$

Setzt man wegen (A-28) die Verteilung $f_o(\tau_o) = \delta(\bar{\tau}_o)$ und noch wegen $\tau_o \ll T_1$: $e^{-\bar{\tau}_o / T_1} = 1$, dann folgt aus (A-27)

$$m_{o'}^{(s)}(t_{o'}) = \langle \mu_z \rangle_o \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t_{o'} < 0 \\ \cos(\pi \dfrac{t_{o'}}{\bar{\tau}_o}) & \text{für} \quad 0 \leq t_{o'} \leq \bar{\tau}_o \\ -1 & \text{für} \quad t_{o'} > \bar{\tau}_o \end{cases} \quad . \qquad \text{(A-27')}$$

Die Funktion $[\, m_{o'}^{(s)}(0) - m_{o'}^{(s)}(t_{o'})\,]/2\langle\mu_z\rangle_o$ heißt "$\sin^2$-Sprungfunktion". Sie wird wegen ihrer analytischen Form gelegentlich als Ersatz einer Sprungfunktion zur Systemanalyse benutzt[26]. Dies ist hier aber nicht nötig, denn wegen der rechten Seite der Ungleichung (A-28) sei die $\sin^2$-Sprungfunktion noch durch eine Sprungfunktion ersetzt. Dann folgt

$$m_{o'}(t_{o'}) = \langle\mu_z\rangle_o \left[1 - 2\,S\left(\frac{\bar{\tau}_o}{2}\right)\right] . \qquad (A\text{-}27'')$$

Das heißt, die Einstrahlung im Zwischenfeld wird als ein idealer Modulator mit Verzögerung um $\bar{\tau}_o/2$ angesehen. Vernachlässigt man auch noch diese Verzögerung, wegen (A-28) dann folgt schließlich aus (37)

$$m_D(t) = \langle\mu_z\rangle_o \left(\int_o^{\infty} e^{-\frac{\tau_s}{T_1}} f_s(\tau_s)\,d\tau_s - 2\int_o^{t} e^{-\frac{t_{o'}}{T_1}} f_s(t_{o'})\,dt_{o'} \right) + m_D^{(R)} \qquad (A\text{-}29)$$

(Im ersten Integral wurde $\tau_s = t - t_{o'}$ substituiert).

Das Detektorsignal ist proportional zu m_D; das wird in Abschnitt 5.21 bei Diskussion des Strömungsdetektors gezeigt. Als Signalkurve bezeichnen wir die Differenz

$$\Delta m_D(t) = m_D(0) - m_D(t)$$

$$= 2\langle\mu_z\rangle_o \int_o^{t} e^{-t'/T_1} f_s(t')\,dt' . \qquad (A\text{-}30')$$

Die Näherungsausdrücke (A-27") wurden eingeführt um (A-30') zu erhalten und das Meßverfahren 1 zuerst anschaulich darzustellen. Setzt man (A-27) in (37) ein und bildet die Signalkurve, so erhält man

$$\Delta m_D(t) = \langle\mu_z\rangle_o \int_o^{t} s^*(t_{o'})\, e^{-\frac{(t-t_{o'})}{T_1}} f_s(t-t_{o'})\,dt_{o'} , \qquad (A\text{-}30)$$

mit $s^*(t_{o'}) = -\cos(\omega_{10} t_{o'}) \int_o^{\infty} e^{-\frac{\tau_o}{T_1}} f_o(\tau_o)\,d\tau_o \left(1 - \int_o^{t_{o'}} f_o(\tau_o)\,d\tau_o\right) -$

$$- \int_o^{\infty} \cos(\omega_{10}\tau_o)\, e^{-\frac{\tau_o}{T_1}} f_o(\tau_o)\,d\tau_o \int_o^{t_{o'}} f_o(\tau_o)\,d\tau_o .$$

$$\omega_{10} = \pi/\bar{\tau}_o .$$

Bei dem Impulsverfahren, mit Impulsdauer τ_i und (32), gilt auch (A-27)solange $t_{o'} < \tau_i$. Dann, nach Ausschalten des Impulses, sind in der ausströmenden Menge $N_{o'}(t_{o'})$ drei Teilmengen enthalten

"1" Teilchen, die zur Zeit $t_{o'} = 0$ schon in der Spule und zur Zeit $t_{o'} = \tau_i$ auch noch in der Spule sind $(\tau_w = \tau_i)$,

"2" Teilchen, die zur Zeit $t_{o'} = 0$ noch vor der Spule und zur Zeit $t_{o'} = \tau_i$ in der Spule sind $(0 < \tau_w < \tau_o)$, und

"3" Teilchen, die zur Zeit $t_{o'} = 0$ noch vor der Spule und zur Zeit $t_{o'} = \tau_i$ auch noch vor der Spule sind, $(\tau_w = 0)$.

Dominiert die Gruppe "1", dann war $\tau_i < \bar{\tau}_o$, was aber zu einer kleinen Menge markierter Teilchen und deshalb zu einem kleinen Detektorsignal führt. Im Interesse ausreichender Meßgenauigkeit wird bei der Messung $\tau_i > \bar{\tau}_o$ gewählt, sodaß die Teilmenge "1" gegenüber der Teilmenge "2" vernachlässigt werden kann. Dann gilt näherungsweise für $m_{o'}(t_{o'} > \tau_i)$ eine Betrachtung ähnlich jener, die zu (A-27)führte. Man kann daher für $t_{o'} > \tau_i$ näherungsweise setzen

$$m_{o'}(t_{o'} > \tau_i) = m_{o'}(t_{o'} = \tau_i) \cos\left[\omega_{10}(t_{o'} - \tau_i)\right]\left[1 - \int_0^{t_o - \tau_i} f_o(\tau_o)\, d\tau_o\right] + \\ + \langle \mu_z \rangle_o \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau_o}{T_1}} f_o(\tau_o)\, d\tau_o \int_0^{t_o - \tau_i} f_o(\tau_o)\, d\tau_o \,. \qquad \text{(A-31)}$$

$$\omega_{10} = \pi / \bar{\tau}_o \quad .$$

Setzt man wieder $f_o(\tau_o) = \delta(\bar{\tau}_o)$ und $e^{-\bar{\tau}_o / T_1} = 1$, dann erhält man aus (A-27) und (A-31)

$$m_{o'}^{(i)}(t_{o'}) = \langle \mu_z \rangle_o \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t_{o'} < 0 \\ \cos(\pi t_{o'} / \bar{\tau}_o) & \text{für} \quad 0 \leq t_{o'} < \bar{\tau}_o \\ -1 & \text{für} \quad \bar{\tau}_o \leq t_{o'} < \tau_i \\ \cos\left(\dfrac{\pi (t_{o'} - \tau_i)}{\bar{\tau}_o}\right) & \text{für} \quad \tau_i \leq t_{o'} < \tau_i + \bar{\tau}_o \\ 1 & \text{für} \quad t_{o'} \geq \tau_i + \bar{\tau}_o \end{cases} \qquad \text{(A-31')}$$

Die Funktion $\left[m_{o'}^{(i)}(0) - m_{o'}^{(i)}(t_{o'}) \right] / 2 \langle \mu_z \rangle_o$ heißt "$\sin^2$-Impulsfunktion", wenn $\tau_i = \bar{\tau}_o$. Ersetzt man auch hier diese Funktion durch zwei Sprung-

funktionen, dann erhält man

$$m_{o'}(t_{o'}) = \langle \mu_z \rangle_o \quad (1 - 2\,S\,(\frac{\bar{\tau}_o}{2}) + 2\,S\,(\tau_i + \frac{\bar{\tau}_o}{2})). \qquad \text{(A-31'')}$$

Beachtet man noch die Ungleichung (A-28), in die τ_i noch eingefügt werden kann,

$$\sqrt{\overline{(\delta\tau_o)^2}} \ll \bar{\tau}_o \lesssim \tau_i \ll \sqrt{\overline{(\delta\tau_s)^2}} \ll \bar{\tau}_s \quad , \qquad \text{(A-28')}$$

dann kann man (A-31') auch näherungsweise als

$$m_{o'}(t_{o'}) = 2\langle \mu_z \rangle_o \, \tau_i \, \delta(t_{o'}) \qquad \text{(A-31''')}$$

schreiben. Damit folgt aus (37),(A-25) und analog (A-30') die Signalkurve

$$\Delta\, m_D(t) = 2\langle \mu_z \rangle_o \, \tau_i \, e^{-t/T_1} \, f_s(t) \; . \qquad \text{(A-32)}$$

Auf die Angabe eines gegenüber (A-32) verbesserten Ausdruckes soll bei dem Impulsverfahren verzichtet werden, weil im Gegensatz zu der strengen Lösung (A-30) schon die Diskussion die zu (A-31) führte, eine Näherungsannahme war.

Verzeichnis der Abbildungen

		Seite
Bild 1a	Schematische Darstellung des Dreifelder-Strömungsspektrometers	5
1b	Verlauf des Erwartungswertes	5
2	Berechnete Laufzeitverteilungen	13
3	Blockschaltbild der Apparatur	29
4	Übergangsfunktion des Meßsystems	31
5	Vergleich von Laufzeitverteilungen	37
6	Vergleich der Meßverfahren	38
7	Anpassungsmaß	40
7a	Anpassungsgrenze	40
8	Anpassungsfehler	41
9	Faktor der Mischverteilung	41
10	Meßkurven aus dem Übergangsgebiet laminar-turbulent	42
11	Reziprokwert des Exponenten ν^* der K-Verteilung	45
12	Diffusionsfaktor D^*, durch Anpassung gewonnen	46
13	Relatives mittleres Schwankungsquadrat der Laufzeitverteilung	48
14	Diffusionskonstante D über der kinetischen Zähigkeit	51
15	Korrelationslänge über der Reynoldszahl	51

Literaturverzeichnis

1 Wilking, S.: Z. f. Physik, 157, 384 (1959).

2 Zhernovoi, A.I.: "NMR in Flowing Liquids", Moskau, (1965), autorisierte Übersetzung i.d. Englische:Consultants Bureau, New York (1965)

3 Trautwein, W.: "Kernresonanzspektrometer zur Messung indirekter Spin-Spin-Wechselwirkung in schwachen Magnetfeldern". Diplomarbeit, Phys. Inst. T.H. Karlsruhe (1964).

4 McCormick, W.S. und W.P. Birkemeier: Rev.Sci.Instr. 40, 346 (1969), McCormick, W.S.: "The System Optimization of the Nuclear Magnetic Resonance Flowmeter". (Ph.D.thesis, University of Wisconsin, 1967).

5 Genthe, W.K.: "The Measurement of Fluid Flow by Means of Nuclear Magnetic Resonance". (Ph.D.thesis, University of Wisconsin, 1965).

6 Hinze, J.O.: "Turbulence", McGraw-Hill, New York (1959).

7 Taylor, G.I.: Proc. London Math.Soc. 20, 196 (1921).
Proc.Roy.Soc. A. 151, 421 (1935).

8 Shavitt, I.: "The Gaussian Function in Calculations of Statistical and Quantum Mechanics" in: "Methodes in Computional Physics" Vol:2, p.1; Academic Press, New York-London (1963).

9 Girke, H.: "Untersuchung von Modulationseinflüssen im Zwischenfeld eines NMR-Strömungsspektrometers". Diplomarbeit, III.Phys.Inst. Freie Universität Berlin (1970).

10 Abend, G.: "Kohärente Doppeleinstrahlung beim NMR-Strömungsspektrometer". Diplomarbeit, III.Phys.Inst. Freie Universität Berlin (1968).

11 Thomas, H.A. und R.D. Huntoon: Rev.Sci.Instr. 20, 516, (1949).

12 Schlichting, H.: in Handbuch d. Physik (E. Flügge) VIII/1 .

13 Nunner, W.: VDI Forschungsheft Nr. 455. (1956).

14 vergl. bei Schlichting, H.[12]: Figur 4 auf S. 355 .

15 Morton, J.B. und W.H. Clark: J. of Physics E; Sci.Instr. 4, 809 (1971).

16 Zhernovoi, A.I.: Inz.-Fiz.Zh. 4, 91 (1961).

17 Gichmann, I.I. und A.W. Skorochod:"Stochastische Differentialgleichungen" Akademie-Verlag, Berlin (1971).

18 Wangsness, R.K. und F. Bloch: Phys.Rev. 89, 728 (1953).

19 Abragam, A.: "The Principles of Nuclear Magnetsm", University Press, Oxford (1970).

20 Landoldt-Börnstein: "Zahlenwerte und Funktionen" II.Bd. 9.Teil: "Magnetische Eigenschaften I" Ziff.:2972, Tab.6b. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1962).

21 Siegert, A. und F. Bloch: Phys.Rev. 57, 522 (1940); vergl. auch 16).

22 Gabillard, R.: Compt.Rend. 232, 96 (1951).

23 Halbach, K.: Helv.Phys.Acta. 29, 37, (1956) und Phys.Rev. 119, 1230 (1960)

24 Primas, H.: Helv.Phys.Acta. 31, 17, (1958).

25 Schulenburg, H.: Dissertation, FB Physik, Freie Universität Berlin (1970)

26 Dobesch, H. und H. Sulanke: "Zeitfunktionen". VEB-Verlag-Technik, Berlin (1964).

Lebenslauf

21. 4. 1919	geboren in Karlsruhe als Sohn der Eheleute Prof. D. Ing. Friedrich Trautwein und Sofie Trautwein, geb. Nagel
1925 - 1934	Grundschule und Oberrealschule in Berlin-Zehlendorf
1934 - 1937	Althoff-Oberrealschule in Nowawes bei Potsdam
15. 9. 1937	Abitur dortselbst
1938 - 1945	Wehrdienst, Unterbrechung durch Verwundung:
1943 - 1944	Studium der Physik an der Friedrich-Wilhelm-Universität zu Berlin
1946 - 1958	selbständige Tätigkeit (1954 Elektromeister-Prüfung in Stuttgart)
1958 - 1964	Studium der Physik an der Techn. Hochschule Karlsruhe
16. 7. 1964	Diplom-Hauptprüfung in Physik
1964 - 1965	Verwalter der Dienstgeschäfte eines Wissenschaftlichen Assistenten am Physikalischen Institut der Techn. Hochschule Karlsruhe
1965 - 1971	Wissenschaftlicher Assistent am III. Physikalischen Institut der Freien Universität Berlin
1971 - jetzt	Akademischer Rat dortselbst

Gesamtherstellung:
REPROTECHNIK Haake GmbH & Co KG
kopieren - pausen - drucken
1 Berlin 12, Hardenbergplatz 11